BCPST 1B Interro 17 (sujet A) : /10 pts 2024-2025

NOM :

PRENOM :

Calculer les limites quand $n \to +\infty$ des expressions suivantes :

1. (/1 pt) $u_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{2n^3 + 4n - 1}$
2. (/1 pt) $v_n = \dfrac{2^n + n^2}{\ln(n) + 2n}$
3. (/1 pt) $w_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}$
4. (/1 pt) $x_n = \ln(\sin(3^{-n}))$
5. (/2 pts) $y_n = 4^n \ln(1 + 2^{-n})$
6. (/2 pts) $z_n = (1 + \frac{2}{n})^n$
7. (/2 pts) $t_n = n\left(e^{\sin(1/n)} - 1\right)$

1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3n^2}{2n^3} = \dfrac{3}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $v_n = \dfrac{2^n}{2n} \times \dfrac{(1+n^2 2^{-n})}{1+\frac{\ln(n)}{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2^n}{n}$ car $\dfrac{1+n^2 2^{-n}}{1+\frac{\ln(n)}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (par croissances comparées)

donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

3) $w_n = \dfrac{\sqrt{2n+1}^2 - \sqrt{2n+3}^2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+3}} = \dfrac{-2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sqrt{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

et $\sqrt{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

4) $3^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin(3^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\ln(y) \xrightarrow[y\to 0]{} -\infty$

Donc $\ln(\sin(3^{-n})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

5) Comme $2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a $\ln(1+2^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{-n}$

Donc $4^n \ln(1+2^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n 2^{-n} = 2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

6) $z_n = (1+\frac{2}{n})^n = \exp(n \ln(1+\frac{2}{n}))$

Comme $\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a $\ln(1+\frac{2}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

donc $n\ln(1+\frac{2}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$ donc $n\ln(1+\frac{2}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^2$

7) Comme $\sin(\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a $e^{\sin(\frac{1}{n})} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(\frac{1}{n})$

Puis $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Ainsi $e^{\sin(\frac{1}{n})} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $n(e^{\sin(\frac{1}{n})} - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

BCPST 1B	Interro 17 (sujet B) : /10 pts	2024-2025

NOM :

PRENOM :

Calculer les limites quand $n \to +\infty$ des expressions suivantes :

1. (/1 pt) $u_n = \dfrac{2n^3 - 2n + 1}{3n^3 - 4n + 1}$
2. (/1 pt) $v_n = \dfrac{3^n + 2n}{\ln(n) + n^2}$
3. (/1 pt) $w_n = \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1}$
4. (/1 pt) $x_n = \ln(1 - \cos(3^{-n}))$
5. (/2 pts) $y_n = 2^n \ln(1 + 4^{-n})$
6. (/2 pts) $z_n = (1 + \frac{3}{n})^n$
7. (/2 pts) $t_n = n \sin\left(e^{1/n} - 1\right)$

1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n^3}{3n^3} = \dfrac{2}{3}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}$

2) $v_n = \dfrac{3^n\left(1+\frac{2n}{3^n}\right)}{n^2\left(1+\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}$ Or par croissances comparées : $\dfrac{3^n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\dfrac{2n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

3) $w_n = \dfrac{\sqrt{3n+2}^2 - \sqrt{3n+1}^2}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sqrt{3n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\sqrt{3n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

4) $3^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\cos(3^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $1-\cos(3^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Or $\ln(y) \xrightarrow[y\to 0]{} -\infty$ donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

5) $4^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+4^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^{-n}$ donc $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n 4^{-n} = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

6) $z_n = \exp(n\ln(1+\frac{3}{n}))$ Or $\dfrac{3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+\frac{3}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n}$

donc $n\ln(1+\frac{3}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3$ donc $n\ln(1+\frac{3}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$ donc $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^3$

7) $e^{\frac{1}{n}} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 - 1 = 0$ donc $\sin(e^{1/n} - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1/n} - 1$

Puis $e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin(e^{1/n}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

donc $n\sin(e^{1/n}-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.