Programme de colles : semaine 17, du 3/2 au 7/2

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

Les points en rouge seront vus uniquement lundi 3 février.

1 Suites réelles

Reprise du programme précédent.

2 Applications

Dans tout ce qui suit $f : E \longrightarrow F$. On ne fait pas de distinction entre fonction et application. La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas attendu du programme. Conformément au programme, on évitera tout "excès de formalisme" impliqué par des exercices trop abstraits.

- notion d'application, ensembles de définition et d'arrivée, image et antécédant, représentation graphique dans le cas d'une fonction numérique. On note F^E l'ensemble des fonctions de E dans F
- composition, on note id_E la fonction identité sur E
- image directe $f(A)$ d'un ensemble $A \subset E$, détermination graphique dans le cas d'une fonction numérique. On note $Im(f) = f(E)$
- injectivité/surjectivité : savoir montrer qu'une fonction est ou n'est pas injective/surjective.
- la fonction $f : E \longrightarrow Im(f)$ est toujours surjective
- bijectivité : savoir montrer qu'une fonction f est bijective en montrant que pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$
- théorème de la bijection : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors $J = f(I)$ est un intervalle ; et si de plus f est strictement monotone sur I alors $f : I \longrightarrow J$ est une bijection. *Ce théorème est admis.*
- on note $f^{-1} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque d'une bijection $f : E \longrightarrow F$. Savoir déterminer l'expression d'une bijection réciproque en résolvant pour $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$
- si $f : E \longrightarrow F$ est bijective alors on a $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.
- soit $f : E \longrightarrow F$. Si $g : F \longrightarrow E$ est telle que $f \circ g = id_E$ et $g \circ f = id_F$ alors f est bijective et $g^{-1} = f$.
- si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- graphe de f^{-1} en fonction du graphe de f : exemple de arcsin, arccos, arctan
- si $f : D \longrightarrow f(D)$ est impaire et bijective sur $D \subset \mathbb{R}$ alors $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ est impaire
- si $f : I \longrightarrow J$ est strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et bijective alors $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est strictement monotone, de même sens de variation que f
- Dérivée de f^{-1} , exemple de $arctan'$.

3 Informatique en langage Python

Pas d'informatique cette semaine.

4 Questions de cours

Cette semaine, les colles suivront le schéma suivant :

- A) un calcul de limites utilisant une croissance comparée et/ou un équivalent, voir Feuille de cours 10, exos 3 et 4 page 9 : <https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5689>
- B) un calcul de primitives ou d'intégrales en utilisant la dérivée d'une composée, voir Feuille de remédiation 10, exo 2 page 4 : <https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5713>
- C) une ou deux question de cours issue de la liste ci-dessous
- D) exercices au choix du colleur

1. Donner la définition avec des quantificateurs de : (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou de : (u_n) tend vers $+\infty$, ou de : (u_n) tend vers $-\infty$ et savoir l'expliquer sur un dessin.
2. Énoncer un des théorèmes suivants : théorème de la limite monotone (cas limite finie et limite infinie), théorème d'encadrement, théorème des suites adjacentes, théorème de comparaison.
3. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{u_n}$. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$. *On montrera que (u_n) est croissante et ne peut pas converger.*
4. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites non nulles à partir d'un certain rang, donner la définition de $u_n \sim v_n$. Énoncer ensuite un ou plusieurs des équivalents usuels (valables si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$) parmi :

<ul style="list-style-type: none"> • si $\alpha \neq 0,$ $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ • $\sin(u_n) \sim u_n$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\tan(u_n) \sim u_n$ • $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$
---	---	---

5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow I$ une fonction croissante et soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que si $u_1 \geq u_0$ alors (u_n) est croissante.
7. Soit $f : E \rightarrow F$. Donner la définition de “ f est injective” et de “ f est surjective”.
8. Donner un exemple de fonction qui soit à la fois (non) surjective et (non) injective (*avec des parenthèses choisies par l'examineur*).
9. Tracer le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(2) = 1$, 1 est un antécédant de 3 par f et 4 n'a pas d'antécédant par f (*ou toutes autres conditions similaires choisies par l'examineur*).
10. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$ est une bijection et déterminer f^{-1} (*sur cet exemple ou tout autre exemple simple choisi par l'examineur et où les ensembles de départ et d'arrivée sont donnés*).

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.