1)
$$u_n = \sqrt{1+\ln(n+1)} - \sqrt{1+\ln(n)} = \frac{\sqrt{1+\ln(n+1)}^2 - \sqrt{1+\ln(n)}^2}{\sqrt{1+\ln(n+1)} + \sqrt{1+\ln(n)}} = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{1+\ln(n+1)} + \sqrt{1+\ln(n)}}$$

Or $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $1+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Et $\sqrt{1+\ln(n+1)} + \sqrt{1+\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

donc $v_n = \frac{1}{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\times\frac{1}{n}$

Donc $w_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ donc $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

4) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a

$$x_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(1+2^{-n})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{2^{-n}} = \frac{2^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ par croissances comparées}$$

donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

5) $y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$

donc $n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$.