TD 11

exo 5 :

1) f non injective car, par exemple, $f(1,0)=f(0,1)=1$ mais $(0,1)\neq(1,0)$
f surjective car : pour $z\in\mathbb{R}$ on a $f(0,z)=0+z=z$ donc $(0,z)$ est un antécédant de z

2) g injective car : pour $x,x'\in\mathbb{R}$ on a : $g(x)=g(x') \Rightarrow \begin{cases} x^2=x'^2 \\ e^x=e^{x'} \end{cases} \Rightarrow e^x=e^{x'} \Rightarrow x=x'$
g non surjective car, par exemple, $(-1,-1)$ n'a pas d'antécédant car $\forall x\in\mathbb{R}$,
$g(x)=(x^2,e^x)\neq(-1,-1)$ car $x^2\geq 0$ et $e^x>0$.

3) h est bijective car : pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ l'équa° $h(x,y)=(a,b)$ se ramène en ....
Comme ... alors h est bijective et $h^{-1}: \ldots \to \ldots$ (à vous de compléter !)
$: \ldots \mapsto \ldots$

exo 3 : $g\circ f : E\to G$

1) On suppose $g\circ f$ injective. Montrons que f injective.
Soient $x,x'\in E$, si $f(x)=f(x')$ alors $g(f(x))=g(f(x'))$ donc $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')$
Or $g\circ f$ est injective, cela implique donc $x=x'$ cqfd.

2) On suppose $g\circ f$ surjective. Montrons que g surjective.
Soit $y\in G$. Comme $g\circ f$ est surjective, il existe $x\in E$ tel que $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$.
Notons $a=f(x)\in F$ on a alors $y=g(a)$: on a bien trouvé un antécédant de y par g
cqfd.