**Exercice 1 (Pièges du produit matriciel)**
Dans chacun des cas suivants, calculer les produits matriciels demandés puis identifier une règle de calcul vraie pour les nombres réels qui n'est plus vraie pour les matrices.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $AB$.

   Moralité :

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $AB$ et $AC$.

   Moralité :

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $AB$ et $BA$.

   Moralité :

4. Mêmes matrices que dans le 3. Calculer $(AB)^2$ et $A^2B^2$.

   Moralité :

5. Mêmes matrices que dans le 3. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

   Moralité :

**Exercice 2**
Dans chacun des cas suivants, lesquels des neuf produits formés à partir de deux des matrices suivantes sont réalisables ? Que valent alors ces produits (présentez vos résultats dans un tableau à double entrée) ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 3**
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A$, c'est-à-dire telles que $AM = MA$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $B$, c'est-à-dire telles que $BM = MB$.

**Exercice 4**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ et exprimer $A^2$ en fonction de $A$.
2. En déduire $A^n$ pour tout $n \geq 1$.

**Exercice 5**
Déterminer $M^n$ pour tout $n \geq 0$ dans chacun des cas suivants (on commencera par calculer à la main $M^n$ pour de petites valeurs de $n$) :

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 6**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer successivement $A^2, A^3, A^4$ et $A^5$.
2. Émettre alors une conjecture sur l'expression de $A^n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

**Exercice 7**

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R},\ R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ R(\theta)^n = R(n\theta)$.
3. (a) Que vaut $R(0)$ ?
   (b) Rappeler la *définition* d'une matrice inversible.
   (c) En utilisant la question 1 et la définition d'une matrice inversible, montrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et donner son inverse.
4. Retrouvez le fait que $R(\theta)$ et inversible ainsi que la valeur de $R(\theta)^{-1}$ grâce à une *propriété* du cours.

**Exercice 8**

Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ dans chacun des cas suivants grâce au binôme de Newton ($a$ désigne un nombre complexe quelconque).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$

**Exercice 9**

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices $A^T,\ B^T,\ C^T,\ A\,A^T,\ C\,C^T$ et $C^TC$.

**Exercice 10**

Pour quels valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Donner alors son inverse.

**Exercice 11**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que $A$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $A^2, A$ et $I_3$.
3. La matrice $A^2$ est-elle inversible ? Si oui, exprimer $(A^2)^{-1}$ en fonction de $A^2, A$ et $I_3$.

**Exercice 12**

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n + v_n \\ v_{n+1} &= -2u_n + v_n \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Soit enfin $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$. En déduire l'expression de $X_n$ en fonction de $A$ et de $X_0$.
2. Justifier que $P$ est inversible et déterminer $P^{-1}$.
3. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$, puis déterminer $D^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En utilisant uniquement le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On commencera par exprimer $A$ en fonction de $D, P$ et $P^{-1}$.
5. Conclure en donnant l'expression de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 13**

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 \\ 11 & -9 & 3 \\ 9 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ et soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
2. Calculer $B = P^{-1}AP$ et donner deux matrices $D$ et $N$ telles que $B = D + N$ avec $D$ diagonale et $N$ une matrice dont tous les coefficients sauf un sont nuls.
3. Calculer $N^2$, $DN$ et $ND$.
4. En déduire l'expression de $B^n$ puis celle de $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 14**

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0$. Montrer que si $A$ est nilpotente alors $I_n - A$ est inversible. *Indication : simplifier, pour $q \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, la quantité* $(1-q)\sum_{k=0}^{m} q^k$.

**Exercice 15**

Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ (pour $m \in \mathbb{R}$.)
3. $C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$.)

**Exercice 16**

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{C}$ la matrice $B = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

**Exercice 17**

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.
2. Sans plus de calculs, résoudre le système $\begin{cases} x + 3y + 4z + 4t = -4 \\ x + y + 4z + t = -2 \\ x + 3y + 3z + 2t = 2 \\ x + 3y + 4z + 5t = 4 \end{cases}$
3. Sans plus de calculs, résoudre le système $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + y + 3z + 3t = 2 \\ 4x + 4y + 3z + 4t = 4 \\ 4x + y + 2z + 5t = 6 \end{cases}$