Programme de colles : semaine 18, du 10/2 au 14/2

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Applications

Reprise du programme précédent.

2 Matrices

Les points suivants n'ont pas encore été abordés en classe : transposée, écriture matricielle des systèmes linéaires, inversion par le pivot de Gauss.

La notion de déterminant n'est au programme de BCPST que dans le cas de la dimension 2.

- on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- matrices lignes, colonnes, carrées, nulle, triangulaires, diagonales. On note $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice diagonale de coefficients $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$
- matrice identité, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$
- opérations matricielles : somme, multiplication par un scalaire, produit, puissance
- produit et puissance de matrices diagonales
- pièges du produit matriciel : en général $AB \neq BA$, et $\big(AB = AC \text{ et } A \neq 0\big) \not\Longrightarrow B = C$
- si A et B commutent alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
- exemples de calculs de puissances de matrices par récurrence.
- <u>matrices inversibles :</u> on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n
  - propriétés de l'inverse : pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $A^{-1}, \lambda A, AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, inverse d'une matrice diagonale
  - exemple de calculs d'inverses en utilisant un polynôme annulateur *(aucun théorème général n'a été énoncé)*
  - inverse d'une matrice de taille 2 : pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on définit $\det A = ad - bc$; A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

3 Informatique en langage Python

- tableaux avec la bibliothèque `numpy` :
  - création avec les commandes : `np.array`, `np.ones`, `np.eye`, `np.zeros`, `np.diag`
  - opérations coefficients par coefficients. *Nous n'avons pas vu en cours le résultat de `A==B` si `A` et `B` sont des tableaux.*
  - accès aux dimensions avec `np.size(A,0)` et `np.size(A,1)`
  - accès ou modifications des coefficients : si `A` est un tableau à n lignes et p colonnes alors on accède à ses coefficients par la syntaxe `A[i,j]` pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, p-1]\!]$
  - création d'une matrice à partir de la matrice nulle via deux boucles `for` imbriquées

4 Questions de cours

Cette semaine, les colles suivront le schéma suivant :

A) un calcul de primitives ou d'intégrales en utilisant la dérivée d'une composée, voir Feuille de remédiation 10, exo 2 page 4 : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5713`

B) une ou deux question de cours issue de la liste ci-dessous

C) exercices au choix du colleur

1. Soit $f : E \longrightarrow F$. Donner la définition de "f est injective" et de "f est surjective".
2. Donner un exemple de fonction qui soit à la fois (non) surjective et (non) injective *(avec des parenthèses choisies par l'examinateur)*.
3. Tracer le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(2) = 1$, 1 est un antécédant de 3 par f et 4 n'a pas d'antécédant par f *(ou toutes autres conditions similaires choisies par l'examinateur).*
4. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + y, x - y)$ est une bijection et déterminer f^{-1} *(sur cet exemple ou tout autre exemple simple choisi par l'examinateur et où les ensembles de départ et d'arrivée sont donnés).*
5. Donner la définition du produit matriciel.
6. Quand dit-on qu'une matrice est inversible ? Démontrer ensuite que $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
7. Démontrer que si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
8. Énoncer le théorème donnant l'inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'appliquer sur un exemple choisi par l'examinateur.
9. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ alors $(AB)C = A(BC)$.
10. Écrire une fonction Python `produitmat` prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant leur produit matriciel. Votre fonction devra gérer le cas où les tailles des matrices A et B ne sont pas compatibles.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.