NOM :
PRENOM :

Question 1 (/1 pt). Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B commutent-elles ?

$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc $AB = BA$ donc A et B commutent.

Question 2 (/2 pts). Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

On a $\det(A) = -2 \times 1 - 1 \times (-1) = -1 \neq 0$ donc A est inversible et

$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Question 3 (/1 pt). Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent alors

$\forall p \in \mathbb{N}, \ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$

Question 4 (/1 pt). On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifient $A = PBP^{-1}$. En déduire, en justifiant succinctement, l'expression de B en fonction de A, P et P^{-1}.

$A = PBP^{-1}$ donc $AP = PBP^{-1}P = PB$ donc $P^{-1}AP = P^{-1}PB = B$

Ainsi $B = P^{-1}AP$.

NOM :
PRENOM :

Question 1 (/1 pt). Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B commutent-elles ?

On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $AB = BA$ donc A et B commutent.

Question 2 (/2 pts). Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

On a $\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 \neq 0$ donc A est inversible

et $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Question 3 (/1 pt). Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent alors

$\forall p \in \mathbb{N} \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$

Question 4 (/1 pt). On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifient $A = P^{-1}BP$. En déduire, en justifiant succinctement, l'expression de B en fonction de A, P et P^{-1}.

$A = P^{-1}BP$ donc $PA = PP^{-1}BP = BP$

donc $PAP^{-1} = BPP^{-1} = B$

Ainsi $B = PAP^{-1}$.