Devoir maison n^o6
À rendre le lundi 3 mars 2025
Une copie par élève obligatoirement.

Partie A.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer J^2 en fonction de J.
2. Quelle relation y a-t-il entre M, J et I_3 ?
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I_3 + \alpha_n J$ où (α_n) est la suite définie par $\alpha_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 1$.
4. En déduire l'expression de M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B.

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par $u_0 = 1,\ v_0 = 2,\ w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

5. Quelle relation y a-t-il entre X_n, X_{n+1} et M ?
6. En déduire l'expression de X_n en fonction de M et de X_0.
7. Conclure en donnant l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.