

DM 6 - Corrigé

1) On a $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$

2) On a $M = J + I_3$

3) Pour $n=0$, $M^0 = I_3$ et $I_3 + \alpha_0 J = I_3 + 0J = I_3$ donc $M^0 = I_3 + \alpha_0 J$.

Supposons que $M^n = I_3 + \alpha_n J$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$M^{n+1} = M^n M = (I_3 + \alpha_n J)(J + I_3) \quad (\text{d'après 2)})$$

$$= I_3 J + \alpha_n J^2 + I_3^2 + \alpha_n J I_3$$

$$= J + \alpha_n \times 3J + I_3 + \alpha_n J$$

$$= I_3 + (1 + 4\alpha_n)J$$

$$= I_3 + \alpha_{n+1} J \quad (\text{d'après la définition de } (\alpha_n)).$$

Ainsi par récurrence on a bien, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = I_3 + \alpha_n J$.

4) La suite (α_n) est arithmético-géométrique. On redout pour $l \in \mathbb{R}$:

$$l = 4l + 1 \Leftrightarrow 3l = -1 \Leftrightarrow l = -\frac{1}{3}.$$

On introduit la suite $(v_n) = (\alpha_n + \frac{1}{3})$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \alpha_{n+1} + \frac{1}{3} = 4\alpha_n + 1 + \frac{1}{3} = 4(\alpha_n + \frac{1}{3}) = 4v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 4 et de 1^{er} terme

$$v_0 = \alpha_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ et finalement: } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times 4^n = \frac{4^n}{3}$$

$$\text{et donc } \alpha_n = v_n - \frac{1}{3} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

$$\text{Finalement, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J.$$

5) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $X_{n+1} = M X_n$. En effet,

$$M X_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n + v_n + w_n \\ u_n + 2v_n + w_n \\ u_n + v_n + 2w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

6) On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = M^n X_0$

En effet, par récurrence : pour $n=0$, $M^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$; et si

$X_n = M^n X_0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors $X_{n+1} = M X_n = M M^n X_0 = M^{n+1} X_0$.

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$X_n = M^n X_0 = \left(\frac{I}{3} + \alpha_n J \right) X_0 = \frac{I}{3} X_0 + \alpha_n J X_0 = X_0 + \alpha_n J X_0$$

$$\text{Or } X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } J X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_n = \frac{4^n - 1}{3}$$

$$\text{et donc } u_n = 1 + 2 \frac{4^n - 1}{3} = \frac{1 + 2 \times 4^n}{3}$$

$$v_n = 2 + 2 \frac{4^n - 1}{3} = \frac{4 + 2 \times 4^n}{3}$$

$$w_n = -1 + 2 \frac{4^n - 1}{3} = \frac{-5 + 2 \times 4^n}{3}$$