

Mathématiques - mercredi 5 mars 2025

Devoir n°6 Durée : 3 h

- Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.
- Ce sujet est constitué de 5 exercices indépendants.
- L'exercice d'informatique est à rendre sur une copie séparée.

Exercice 1 (informatique).

Si des bibliothèques sont nécessaires à l'exécution de vos fonctions, vous les importerez une fois seulement comme vous le feriez dans un fichier script.

1. Écrire une fonction `tri` prenant en argument une liste de nombres `L` et la renvoyant après l'avoir triée dans l'ordre croissant. Vous choisirez un des deux algorithmes vus en classe, dont vous préciserez le nom. De plus, vous explicitez les valeurs prises par `L` au cours de l'algorithme si initialement $L = [4, 0, 3, 10, 2]$.
2. (a) Écrire une fonction `comptage` prenant en argument une matrice de nombres et renvoyant le nombre de zéros qu'elle contient.

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, alors `comptage(A)` doit renvoyer 4.

(b) Créer la matrice `A` prise en exemple à la question précédente.

3. Écrire une fonction `augmentation` prenant en argument une liste de nombres `L` et un taux `a` d'augmentation et renvoyant une matrice à deux lignes dont la première ligne contient les éléments de `L` et la deuxième les éléments de `L` augmentés de `a`%.

Par exemple, si $L = [60, 120, 10]$ alors `augmentation(L, 50)` doit renvoyer la matrice $\begin{pmatrix} 60 & 120 & 10 \\ 90 & 180 & 15 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (calculs).

1. Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque $n \rightarrow +\infty$:

(a) $u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n},$

(b) $v_n = n \ln(1 + e^{-n}),$

(c) $w_n = \left(\frac{1+n}{n}\right)^n.$

2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \frac{1}{x^3} \text{ sur } \mathbb{R}_*^+,$

(b) $g : x \mapsto \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2} \text{ sur } \mathbb{R},$

(c) $h : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)} \text{ sur } \mathbb{R}_*^+.$

Exercice 3 (cours).

1. Quand dit-on qu'une matrice est symétrique ?
2. Donner la définition de : " $u : I \longrightarrow J$ est surjective".
3. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on considère l'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(A) = PA.$$

Montrer que ϕ est bijective en explicitant ϕ^{-1} .

Exercice 4 (puissances d'une matrice).

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dans cet exercice, on calcule M^n pour $n \in \mathbb{N}$ par 2 méthodes différentes.

Première méthode : en déterminant un polynôme annulateur.

1. Déterminer deux réels α et β tels que $M^2 + \alpha M + \beta I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, indiquer son inverse. (*Indication : il n'est pas nécessaire d'utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour répondre à cette question*).
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.
4. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n, \\ b_{n+1} = 2a_n. \end{cases}$$

Montrer que la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.

5. En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis l'expression de M^n en fonction de M , I_3 et $n \in \mathbb{N}$.

Deuxième méthode : en utilisant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
7. Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}MP$, et justifier que $M = PDP^{-1}$. Quelle propriété particulière possède la matrice D ?
8. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.
9. En déduire l'expression de M^n en fonction de n et vérifier que le résultat est cohérent avec celui obtenu à la question 5.

Exercice 5 (une suite récurrente).**Partie A : résultats préliminaires**

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors $\arctan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. (*Indication : on rappelle que $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$* .)
2. On admet le théorème suivant, dit "règle de L'Hôpital" :

Théorème : Soit $\ell \in \mathbb{R}$, et soient $f, g :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ et $g' \neq 0$ sur $]0, 1[$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

En utilisant la règle de L'Hôpital, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{3}$.

3. On admet le théorème suivant, dit “théorème de Cesàro en 0” :

Théorème : Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ une suite réelle, et soit la suite (y_n) donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

En utilisant le théorème de Cesàro en 0, montrer que si $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est une suite convergeant vers un réel ℓ alors la suite (y_n) donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ . (Indication : on introduira la suite $(a_n) = (x_n - \ell)$.)

Partie B : étude d’une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

4. Donner sans justifier le tableau de variations de la fonction $\arctan$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

6. Calculer u_2 puis déterminer le sens de variation de (u_n) .

7. Montrer que (u_n) converge.

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(x) - x$.

8. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

9. En déduire que l’équation $\arctan(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l’on précisera.

10. Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Partie C : un équivalent

Dans la suite de l’exercice on cherche un équivalent de (u_n) . On introduit la suite (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}.$$

11. En utilisant la question 1, montrer que $\arctan(u_n) + u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2u_n$.

12. En utilisant la question 2, en déduire un équivalent de x_n , puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\frac{2}{3}$.

13. En utilisant la question 3, en déduire un équivalent de u_{n+1}^2 .

14. Conclure en déterminant un équivalent simple de u_n .

15. *Question bonus. Cette question difficile ne sera corrigée que si toutes les autres questions ont été abordées avec sérieux.* Démontrer le “théorème de Cesàro en 0” en revenant à la définition avec des quantificateurs d’une limite. On écrira que $|y_n| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} x_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |x_k|$ pour un N bien choisi, puis on majorera séparément chacun des deux termes.