DS 6 - Corrigé

Exercice 1 :

1) Tri par sélection :

/3

```
def tri(L):
    n = len(L)
    for k in range(n):
        ind = k
        for i in range(k,n):
            if L[i] < L[ind]:
                ind = i
        L[ind], L[k] = L[k], L[ind]
    return L
```

Les valeurs prises par la liste proposée au cours de l'algorithme sont :

[4,0,3,10,2]
[0,4,3,10,2]
[0,2,3,10,4]
[0,2,3,10,4]
[0,2,3,4,10]
[0,2,3,4,10]

/1

ou Tri par insertion :

```
def tri(L):
    n = len(L)
    for k in range(1,n):
        x = L[k]
        j = k
        while L[j-1] > x and j >= 1:
            L[j] = L[j-1]
            j = j-1
        L[j] = x
    return L
```

Les valeurs prises par la liste proposée au cours de l'algorithme sont :

[4,0,3,10,2]
[0,4,3,10,2]
[0,3,4,10,2]
[0,3,4,10,2]
[0,2,3,4,10]

2) a)

```
import numpy as np
def comptage(A):
    n = np.size(A,0)
    p = np.size(A,1)
    compt = 0
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if A[i,j] == 0:
                compt = compt + 1
    return compt
```

/2

b) A = np.array([[1,0],[0,0],[2,0]]) /1

3)
```
def augmentation(L, a):
    p = len(L)
    M = np.zeros((2,p))
    for j in range(p):
        M[0,j] = L[j]
        M[1,j] = L[j]*(1+ a/100)
    return M
```
/3

Exercice 2

1) a) $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n} = \dfrac{\ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n} = \dfrac{\ln(n^2)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}$

$= \dfrac{2\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}$

Or $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

et $1+\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
et $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $\Big\}$ donc $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

b) $e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$ donc

$v_n = n\ln(1+e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^{-n} = \dfrac{n}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

Ainsi $\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

c) $w_n = \left(\dfrac{1+n}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\dfrac{1+n}{n}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1$

Ainsi $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e}$.

2) a) Les primitives de f sur $\mathbb{R}_*^+$ sont les $\boxed{F : x \longmapsto -\frac{1}{2x^2}+c}$ avec $c\in\mathbb{R}$

(car $f(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3}$ donc $F(x)=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+c$)

b) Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les $\boxed{G : x \longmapsto -\ln(e^{-x}+2)+c}$ avec $c\in\mathbb{R}$

(car $g(x)=\frac{-u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=e^{-x}+2$ donc $G(x)=\ln(u(x))+c$)

~~c) Les primitives de~~ $\cancel{h}$ ~~sur~~ $\cancel{\mathbb{R}_*^+}$ ~~sont les~~ $\cancel{\boxed{H : x \longmapsto (\ln(x))^2+c}}$ ~~avec~~ $\cancel{c\in\mathbb{R}}$

~~(car~~ $\cancel{h(x)=u'(x)u(x)}$ ~~avec~~ $\cancel{u(x)=\ln(x)}$ ~~donc~~ $\cancel{H(x)=u^2(x)+c}$ ~~).~~

erreur d'énoncé : cette question ne sera pas prise en compte

Exercice 3 :

1) Une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique lorsque $\boxed{A^T=A}$.

2) Une fonction $u : I \to J$ est dite surjective lorsque :

$\forall y\in J,\ \exists x\in I : y=u(x)$

3) Soit $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, résolvons pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$\phi(A)=B \iff PA=B \iff P^{-1}PA=P^{-1}B \iff A=P^{-1}B$

Comme on obtient une unique solution, c'est que ϕ est bijective et ϕ^{-1} est donnée par : $\boxed{\begin{array}{l}\phi^{-1} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \quad : B \longmapsto P^{-1}B.\end{array}}$

Exercice 4 :

1) On calcule que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

alors $M^2 + \alpha M + \beta I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3-\alpha+\beta & -1+\alpha & -1+\alpha \\ -1+\alpha & 3-\alpha+\beta & -1+\alpha \\ -1+\alpha & -1+\alpha & 3-\alpha+\beta \end{pmatrix}$.

Finalement, si on choisit $\alpha = 1$ et $\beta = -2$ alors $-1+\alpha = 0$
et $3-\alpha+\beta = 3-1-2 = 0$, donc $\boxed{M^2 + M - 2I_3 = 0.}$

2) On a $M^2 + M - 2I_3 = 0$ donc $M^2 + M = 2I_3$ donc $\frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}M = I_3$
donc $M\left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}I_3\right) = \left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}I_3\right)M = I_3$.
Ainsi M est inversible et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}I_3}$.

3) Démontrons-le par récurrence.
Pour $n=0$, on a $M^0 = I_3 = a_0 M + b_0 I_3$ si on choisit $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$
ainsi la propriété est vraie au rang $n=0$.
Supposons que $M^n = a_n M + b_n I_3$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors
$M^{n+1} = M^n M = (a_n M + b_n I_3) M = a_n M^2 + b_n M$
On utilise alors la question 1) pour dire que $M^2 = 2I_3 - M$ donc
$M^{n+1} = a_n(2I_3 - M) + b_n M = (b_n - a_n)M + 2a_n I_3 = a_{n+1} M + b_{n+1} I_3$
si on pose $a_{n+1} = b_n - a_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$
Ainsi on a bien démontré par récurrence que
$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = a_n M + b_n I_3$ où (a_n) et (b_n) sont les suites

définies par les relations de récurrences ci-dessus (et qui sont celles de la question 4))

4) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a, d'après la définition des suites (a_n) et (b_n) :

$$\boxed{a_{n+2} = b_{n+1} - a_{n+1} = 2a_n - a_{n+1}}$$

donc (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.

5) Le polynôme caractéristique associé à la suite (a_n) est

$$P(X) = X^2 + X - 2 = (X+2)(X-1)$$

D'après le cours, il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda \times (-2)^n + \mu \times 1^n = \mu + (-2)^n \lambda.$$

On a par ailleurs que $a_0 = 0$ et $a_1 = b_0 - a_0 = 1$. On résout donc

$$\begin{cases} \mu + (-2)^0 \lambda = 0 \\ \mu + (-2)^1 \lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu + \lambda = 0 \\ \mu - 2\lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ -3\lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \frac{1}{3} \\ \lambda = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_n = \dfrac{1 - (-2)^n}{3}}$

Par suite, $b_n = a_{n+1} + a_n = \dfrac{1-(-2)^{n+1}}{3} + \dfrac{1-(-2)^n}{3} = \dfrac{2 - (-2)^{n+1} - (-2)^n}{3}$

$$= \frac{2 - (-2)^n(-2+1)}{3} = \boxed{\frac{2 + (-2)^n}{3}}$$

et finalement, $M^n = a_n M + b_n I_3 = \boxed{\dfrac{1-(-2)^n}{3} M + \dfrac{2+(-2)^n}{3} I_3}$

On peut expliciter cette écriture sous la forme

$$M^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad y_n = \frac{1-(-2)^n}{3}$$

$$\text{et} \quad x_n = \frac{2+(-2)^n}{3} - \frac{1-(-2)^n}{3} = \frac{1 + 2(-2)^n}{3}$$

6) Pour $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on résout :

$PX = Y \iff PX = I_3 Y$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \quad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \qquad (*)$$

A ce stade, on lit que $\underline{\mathrm{rg}(P) = 3}$ et comme $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on en déduit que <u>$P$ est inversible</u>. Poursuivons la résolution :

$$(*) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \quad (L_2 \leftarrow \tfrac{1}{3} L_2)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$

Ainsi $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

7) Calculons

$$D = P^{-1} M P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

La matrice D est donc <u>diagonale</u>

Comme $D = P^{-1}MP$ on a $\underline{PDP^{-1}} = PP^{-1}MPP^{-1} = \underline{M}$

8) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Pour $n=0$, $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = M^0$ donc la propriété est vraie.

Supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

9) Comme D est est diagonale, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

Ainsi $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & 0 \\ -2\times(-2)^n & 1 & -(-2)^n \\ (-2)^n & 1 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ -4\times(-2)^n+1+3(-2)^n & 1+2(-2)^n & 2\times(-2)^n+1-3(-2)^n \\ 2\times(-2)^n+1-3(-2)^n & 1-(-2)^n & -(-2)^n+1+3(-2)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'_n & y'_n & y'_n \\ y'_n & x'_n & y'_n \\ y'_n & y'_n & x'_n \end{pmatrix}$$

avec $x'_n = \dfrac{1+2(-2)^n}{3}$ et $y'_n = \dfrac{1-(-2)^n}{3}$ soit le même résultat qu'à la Q5.

Exercice 5

1) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite $v_n = \arctan(u_n)$ vérifie

$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan(0) = 0$, donc $\tan(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ c'est-à-dire que

$\tan(\arctan(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \arctan(u_n)$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \arctan(u_n)$

ou encore $\boxed{\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$.

2) Soient $f : x \mapsto \arctan(x) - x$ et $g : x \mapsto x^3$.

Les fonctions f et g sont dérivables sur $]0,1]$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \arctan(0) - 0 = 0$

et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0^3 = 0$, et $\forall x \in]0,1]$, $g'(x) = 3x^2 \neq 0$.

De plus, pour $x \neq 0$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \frac{1-(1+x^2)}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{3(1+x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{3}.$$

D'après la règle de L'Hôpital on a donc $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{3}$

c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{3}}$

3) Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors la suite $(a_n) = (x_n - \ell)$ vérifie $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'après le théorème de Césaro en 0 la suite (b_n) définie par

$\forall n > 0$, $b_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, vérifie donc $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Or, $$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell$$

$$= y_n - \frac{1}{n}\times n\ell = y_n - \ell$$

Ainsi $y_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$

4) Le tableau de variation de arctan est

x	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow 0 \nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

5) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

Pour $n=1$, l'énoncé donne $u_1 = 1 > 0$.

Supposons que $u_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors, comme arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ cela implique que

$\arctan(u_n) > \arctan(0)$ c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$ ce qu'il fallait démontrer

6) On a $u_2 = \arctan(u_1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} < 1 = u_1$

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

Pour $n=1$, on vient de voir que l'inégalité est vraie.

Supposons que $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Comme arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ cela implique que $\arctan(u_{n+1}) \leqslant \arctan(u_n)$

c'est-à-dire que $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi (u_n) est décroissante.

7) La suite (u_n) est décroissante (Q6) et minorée par 0 (Q5) donc converge en vertu du théorème de convergence monotone.

8) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 \leqslant 0$ car $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ car $1+x^2 \geqslant 1$ car $x^2 \geqslant 0$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ est une bijection.

Par ailleurs, $\arctan(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Le tableau de variations de f est donc le suivant

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Comme f est continue, on peut en déduire que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Finalement, d'après le théorème de la bijection $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

9) On remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) = x \iff f(x) = 0$

Comme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. De plus, on remarque que $\arctan(0) = 0$.

Finalement, $x = 0$ est la seule solution de l'équation $\arctan(x) = x$.

10) On a vu que (u_n) convergeait, notons donc $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a alors $\arctan(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan(l)$ et $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ on obtient donc $l = \arctan(l)$. D'après la question 9) c'est donc que $l = 0$. Finalement $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

11) Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'après Q1 on a $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ c'est-à-dire que

$\dfrac{\arctan(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Dès lors $\dfrac{\arctan(u_n) + u_n}{2u_n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\arctan(u_n)}{u_n} + \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc $\boxed{\arctan(u_n) + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n}$.

12) On a $x_n = \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_{n+1}^2} = \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{\arctan(u_n)^2}$

$$= \frac{\arctan(u_n)^2 - u_n^2}{u_n^2 \arctan(u_n)^2} = \frac{(\arctan(u_n) - u_n)(\arctan(u_n) + u_n)}{u_n^2 \arctan(u_n)^2}$$

Or $\arctan(u_n)+u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$ et $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\arctan(u_n)-u_n)\times 2u_n}{u_n^2 \times u_n^2} = 2\,\dfrac{\arctan(u_n)-u_n}{u_n^3}$

Or d'après la Q2 $\dfrac{\arctan(x)-x}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{3}$ donc, puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\dfrac{\arctan(u_n)-u_n}{u_n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{1}{3}$ et donc $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{2}{3}}$

13) D'après la Q3, la suite (y_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ vérifie $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{2}{3}$.

Or $y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{u_k^2}-\dfrac{1}{u_{k+1}^2}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_1^2}-\dfrac{1}{u_{n+1}^2}\right)$

donc $y_n = \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{u_{n+1}^2}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{nu_{n+1}^2}$

donc $\dfrac{1}{nu_{n+1}^2} = \dfrac{1}{n} - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0-\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$

donc $\dfrac{1}{nu_{n+1}^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3}$ donc $\boxed{u_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n}}$

14) On a vu que $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ c'est-à-dire $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n}$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{2n}}}$

15) Soit (x_n) une suite telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et soit (y_n) la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$. Montrons que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

c'est-à-dire que : $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}^* : \forall n\geq N,\ |y_n|\leq\varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $|x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dès lors pour $n \geq N$ on écrit, par inégalité triangulaire :

$$|y_n| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} x_k\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |x_k|$$

Comme N est fixé, on a $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$; il existe donc $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N'$ $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par ailleurs, par définition de N on peut écrire, puisque $n \geq N$, que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |x_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{n-N+1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, notant $N'' = \max(N, N')$, on a, pour tout $n \geq N''$:

$|y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ce qu'il fallait démontrer.