Feuille de cours 14 : indépendance

4 Évènements indépendants

4.1 Indépendance de deux évènements

Définition 1 (évènements indépendants)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Proposition 2 (Lien avec les probabilités conditionnelles)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors

$$(A \text{ et } B \text{ sont indépendants}) \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

Remarque : Dire que deux évènements sont indépendants signifie donc que la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

En pratique le plus souvent, l'indépendance de deux évènements est une *hypothèse de modélisation*. Lorsque l'énoncé ne la précise pas c'est à vous de repérer si deux évènements A et B sont indépendants en vous posant la question : "savoir que B est réalisé modifie-t-il la probabilité que A le soit aussi ?".

Exemple : Les évènements A et B sont-ils indépendants dans les situations suivantes ?

1. On lance deux dés. A : "le résultat du premier dé est 1", B : "le résultat du deuxième dé est 5".
2. On tire successivement et *sans remise* 2 boules dans une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires. A : "la première boule est blanche", B : "la deuxième boule est blanche".
3. Même expérience et évènements qu'au-dessus, mais pour un tirage successif *avec remise*.

Exercice 1
On prend une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Les évènements A : "tirer un roi" et B : "tirer un pique" sont-ils indépendants ?

Exercice 2
On lance une pièce équilibrée 2 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois "pile" ?

Remarque : Attention à ne pas confondre **indépendants** (i.e.) et **incompatibles** (i.e.) ! D'ailleurs, si A et B sont deux évènements incompatibles tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B ne sont pas indépendants puisque :

Proposition 3
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B deux évènements indépendants, alors :

i) A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
ii) $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
iii) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

4.2 Indépendance de n évènements

Définition 4 (deux à deux indépendants, mutuellement indépendants)
Soient $A_1, \ldots, A_n$ n évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits :

1. **deux à deux indépendants** lorsque

   $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j,\ A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants, i.e. } \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

2. **mutuellement indépendants** lorsque pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, et pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, on a

   $$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\,\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Exercice 3
On lance n fois un dé classique. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 ?

Exercice 4
On lance un dé rouge et un dé bleu, et on considère les évènements suivants :
A : "le dé rouge affiche un numéro pair", B : "le dé bleu affiche un numéro pair"
et C : "la somme des deux numéros obtenus est paire".
Les évènements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ? mutuellement indépendants ?

Remarque : Si les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. Mais la réciproque est fausse.

Proposition 5
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ soit B_i l'un des évènements A_i ou sous contraire : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.
Alors les évènements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Exemple : Si A_1, A_2, A_3, A_4 sont mutuellement indépendants, alors A_1, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$, A_4 sont mutuellement indépendants.