Programme de colles : semaine 21, du 17/3 au 21/3

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Dénombrement

Dans tout ce qui suit, E et F sont des ensembles finis.

- on note $Card(E)$ le cardinal de E
- on a $Card(E) = N \in \mathbb{N}^*$ si et seulement s'il existe une bijection $f : [\![1, N]\!] \longrightarrow E$
- E et F sont de même cardinal si et seulement s'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$
- cardinal d'une union : $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$. *Les élèves n'ont pas à connaître la formule du crible pour plus de deux ensembles, mais le cas de trois ensembles a été traité en exercice.*
- notion de partition d'un ensemble E
- si $(A_1, \dots, A_p)$ est une partition de E alors $Card(E) = \sum_{i=1}^{p} Card(A_i)$
- cardinal du complémentaire : si $F \subset E$ alors $Card(E \backslash F) = Card(E) - Card(F)$
- si $F \subset E$ alors on a $Card(F) \leq Card(E)$, et $Card(E) = Card(F)$ si et seulement si $E = F$
- cardinal d'un produit cartésien : $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$ et $Card(E^p) = Card(E)^p$
- nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments : n^p
- nombre de p-arrangements[1] d'un ensemble à n éléments : $\mathcal{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
- nombre de permutations d'un ensemble à n éléments : $n!$.
- nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
- nombre de parties d'un ensemble à n éléments : 2^n
- nombre d'anagrammes d'un mot donné
- savoir reconnaître dans une situation concrète s'il s'agit de p-listes, p-arrangements, permutations, p-combinaisons, ensemble des parties
- interprétations combinatoires des formules sur les coefficients binomiaux : symétrie ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), formule de Pascal ($\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$), formule "du chef" ou d'absorption ($\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$), binôme de Newton

2 Probabilités finies

<u>Attention :</u> La notion d'indépendance de n évènements avec $n \geq 3$ n'a pas encore été vue en classe.

Les élèves peuvent dessiner des arbres de probabilités au brouillon, mais ceux-ci ne constituent pas une preuve.

- vocabulaire probabiliste : expérience aléatoire, univers, évènement, évènement élémentaire, contraire, impossible, certain, incompatibles
- interprétation de l'union, l'intersection, et le complémentaire d'évènements
- notion de système complet d'évènements
- probabilité sur un univers fini, formules $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ si les A_i sont deux à deux incompatibles. Enfin, si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ pi \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- situations d'équiprobabilité, lien avec le dénombrement

1. le programme recommande plutôt l'expression "p-listes sans répétitions"

- probabilités conditionnelles : on note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité de A sachant B, formule et interprétation
- pour B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application $\mathbb{P}_B : A \longmapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. En particulier, $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(\overline{A})$, $\mathbb{P}_B(A \cup A') = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A') - \mathbb{P}_B(A \cap A')$, etc.
- formule des probabilités composées
- formule des probabilités totales. *On donne ce nom indifféremment aux deux formules $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$ et $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$ valables si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'évènements.*
- formule de Bayes. Exemple d'utilisation de la formule de Bayes combinée avec la formule des probabilités totales
- indépendance de deux évènements : définition et interprétation. Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$
- si A et B sont indépendants alors il en est de même de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B, et de $\overline{A}$ et $\overline{B}$

3 Questions de cours

Cette semaine, les colles suivront le schéma suivant :

A) un calcul de primitives en utilisant la dérivée d'une composée, voir Feuille de remédiation 10, exo 2 page 4 : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5713`
ou un calcul d'intégrale en utilisant une décomposition en éléments simples, voir Feuille de remédiation 11 : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5822`
La forme de la décomposition sera donnée par l'examinateur.

B) une question de cours issue de la liste ci-dessous

C) énoncer une des formules suivantes et l'appliquer sur un exemple choisi par l'examinateur : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

D) exercices au choix du colleur

1. Énoncer la formule donnant le cardinal d'une union de 2 ensembles finis.
2. Énoncer la formule donnant le cardinal du complémentaire d'un ensemble fini.
3. Donner la définition d'une partition (ou d'un système complet d'évènements) d'un ensemble (d'un espace probabilisé). Quelle formule sur les cardinaux (ou sur les probabilités) a-t-on dans ce cas ?
4. En utilisant la formule pour le cardinal d'une union de deux ensembles et la distributivité de l'union et l'intersection (cf exo 1 TD 13), montrer que pour trois ensembles finis E, F, G :
$$\begin{aligned} Card(E \cup F \cup G) &= Card(E) + Card(F) + Card(G) \\ &\quad - Card(E \cap F) - Card(F \cap G) - Card(E \cap G) + Card(E \cap F \cap G). \end{aligned}$$
5. Si $Card(E) = n$ que vaut $Card(\mathcal{P}(E))$? Démontrer cette formule en paritionnant $\mathcal{P}(E)$ selon le nombre d'éléments des sous-ensembles de E.
6. Déterminer le nombre d'anagrammes d'un mot choisi par l'examinateur. *Les élèves ne doivent pas simplement appliquer une formule toute faite, mais expliquer la manière de compter.*
7. Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini.
8. Donner et démontrer la formule donnant $\mathbb{P}(\overline{A})$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.
9. Démontrer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
10. Donner la définition de "A et B sont deux évènements indépendants", puis démontrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B (ou, au choix de l'examinateur, A et $\overline{B}$) le sont aussi.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.