

Feuille de cours 12 : limites de fonctions réelles de la variable réelle

Pour les calculs pratiques de limites de fonctions, on renvoie aux feuilles de remédiation.

1 Définitions

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, privé éventuellement d'un nombre fini de points et on considère une fonction à valeurs réelles $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1 Limites à l'infini

Rappel : Pour une suite réelle $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ on a donné les définitions suivantes :

- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ lorsque :
- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ lorsque :
- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ lorsque :

On adapte cette définition en faisant jouer à $x \in I$ le rôle de $n \in \mathbb{N}$ pour obtenir la définition de la limite en $+\infty$ d'une fonction réelle :

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in \mathbb{R}$ tel que $[A_0, +\infty[\subset I$.

On dit que :

- f a pour limite ℓ en $+\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$ lorsque :
- f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$ lorsque :
- f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$ lorsque :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, (x \geq M \implies f(x) \leq B)$$

Exemple :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, en effet :

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, en effet :

Contrairement au cadre des suites, on peut s'intéresser à d'autres limites que $x \rightarrow +\infty$, à commencer par $x \rightarrow -\infty$. Les définitions sont similaires :

Définition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in \mathbb{R}$ tel que $] -\infty, A_0] \subset I$.

On dit que :

- f a pour limite ℓ en $-\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$ lorsque :
- f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, (x \leq M \implies f(x) \geq A)$$
- f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$ lorsque :

Une variante plus profondément différente consiste à s'intéresser à la limite $x \rightarrow x_0$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.2 Limite en un point

La notion de limite d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ n'a de sens que si $x_0 \in I$ ou si x_0 appartient *au bord* de I . Par exemple si $I =]-\infty, 2[\cup]3, 5[$ alors on peut s'intéresser à une limite en tout $x_0 \in I$ mais aussi en $x_0 = 2$ ou $x_0 = 3$.

Interprétation graphique : Quand dit-on que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$?

Définition 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou du bord de I .

On dit que f a pour limite ℓ en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x_0} f = \ell$ lorsque :

Exemple : Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$.

Remarque 4

- La valeur de η dépend de ε comme l'indique l'ordre des quantificateurs. Intuitivement, plus ε est petit plus $\eta = \eta(\varepsilon)$ est .
- Si f est définie en x_0 , i.e. $x_0 \in I$, et si $\lim_{x_0} f = \ell$ alors $f(x_0) = \ell$. En effet,

Les définitions sont analogues dans le cas d'une limite infinie :

Définition 5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou du bord de I .

On dit que :

- f a pour limite $+\infty$ en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x_0} f = +\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \eta \implies f(x) \geq A)$$

- f a pour limite $-\infty$ en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x_0} f = -\infty$ lorsque :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \eta \implies f(x) \leq B)$$

Exemple : Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

1.3 Limite à gauche/à droite en un point

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Peut-on avoir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$?

Dans ce cas de figure, on a tout de même envie de parler de limites de f en $x_0 = 0$. Mais il faut pour cela préciser que l'on restreint f à $\mathbb{R}_*^-$ ou $\mathbb{R}_*^+$.

Définition 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou du bord de I .

On dit que :

- f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow[x < x_0]{x \rightarrow x_0} \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ lorsque $f|_{I \cap]-\infty, x_0[}$ admet ℓ pour limite en x_0 .
- f admet ℓ pour limite à droite en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow[x > x_0]{x \rightarrow x_0} \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ lorsque $f|_{I \cap]x_0, +\infty[}$ admet ℓ pour limite en x_0 .

Notation : dans le cas où ℓ est une limite finie, on note $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ la limite à gauche et $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ la limite à droite.

Exemple : Pour la fonction f de l'exemple précédent, $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ et $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Remarque 7

La notion de limite à gauche (resp. à droite) en x_0 n'a de sens que s'il est possible d'arriver vers x_0 sous la contrainte $x < x_0$ (resp. $x > x_0$) en restant dans I . Cela n'a par exemple pas de sens de chercher la limite à gauche en 0 de la fonction $\ln$.

Proposition 8

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un élément de I ou de son bord et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que f est définie "à gauche et à droite de x_0 " de sorte qu'il y a un sens à parler de ses éventuelles limites à gauche et à droite en x_0 .

1. Si $x_0 \notin I$ i.e. si f n'est pas définie en x_0 alors :
 f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que ces deux limites sont égales.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

2. Si $x_0 \in I$ i.e. si f est définie en x_0 alors :
 f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que ces deux limites sont égales à $f(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Exemple :

1. Valeur absolue sur $I = \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Étudiez la limite en $x_0 = 0$.
2. Partie entière sur $I = [-1, 1[$: $\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\end{cases}$ Étudiez la limite en $x_0 = 0$.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Étudiez la limite en $x_0 = 1$.

1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 9

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$) et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors f a pour limite ℓ en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers x_0 , la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ .

Démonstration : $\boxed{\Leftarrow}$ admis.

$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que : si (u_n) tend vers x_0 et si la limite de f en x_0 est ℓ alors la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ . On traite uniquement le cas où ℓ et x_0 sont réels (les autres cas, similaires, sont à faire en exercice en travaillant le cours).

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, il existe

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$ donc il existe

Ainsi pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - x_0| \leq \eta$ donc $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$ ce qu'il fallait démontrer.

On utilise souvent la contraposée du sens que nous avons démontré pour prouver qu'il est faux que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$:

Méthode pour montrer qu'une limite n'existe pas :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$). Pour montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas, on exhibe deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I telles que :

- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$,
- mais $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'ont pas le même comportement quand $n \rightarrow +\infty$.
Par exemple $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2 \neq \ell_1$.

Exemple : Montrons que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

2 Théorèmes concernant les limites

2.1 Comportement au voisinage d'une limite finie

Proposition 10

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$) et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ (limite **finie**), alors :

1. La limite ℓ est unique.
2. f est bornée sur un voisinage de x_0 :
 - dans le cas $x_0 \in \mathbb{R} : \exists \eta > 0 \exists M > 0 : \forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x)| \leq M$.
 - dans le cas $x_0 = +\infty : \exists A \in \mathbb{R}, \exists M > 0 : \forall x \in I \cap]A, +\infty[, |f(x)| \leq M$.
 - dans le cas $x_0 = -\infty : \exists B \in \mathbb{R}, \exists M > 0 : \forall x \in I \cap]-\infty, B[, |f(x)| \leq M$.
3. Si $a < \ell < b$ alors on a $a < f(x) < b$ sur voisinage de x_0 :
 - dans le cas $x_0 \in \mathbb{R} : \exists \eta > 0 : \forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, a < f(x) < b$.
 - dans le cas $x_0 = +\infty : \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in I \cap]A, +\infty[, a < f(x) < b$.
 - dans le cas $x_0 = -\infty : \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in I \cap]-\infty, B[, a < f(x) < b$.

En particulier si $\ell > 0$ alors f est strictement positive au voisinage de x_0 .

Remarque 11

La réciproque de 2. est fautive : une fonction bornée au voisinage de x_0 n'admet pas forcément de limite en x_0 . *Contre-exemple* :

2.2 Compatibilité avec la relation d'ordre

Proposition 12

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, et x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$).

On suppose que

- $f \leq g$ sur I , et
- f et g ont des limites **finies** en x_0 .

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Remarque 13

1. Si $f < g$ sur I , alors en passant à la limite, on ne récupère qu'une inégalité **large** : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
2. Attention, l'existence de la limite finie des fonctions est une **hypothèse** : il faut d'abord savoir que ces limites existent pour pouvoir appliquer ce théorème.

Proposition 14 (Théorème d'encadrement)

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$) et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que

- $g \leq f \leq h$ sur I , et
- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ (limite commune **finie**).

Alors f admet une limite en x_0 et cette limite vaut ℓ : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Corollaire : Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g = 0$ et si f est bornée alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg) = 0$.

Démonstration :

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Proposition 15 (théorème de comparaison)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, et x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$).

On suppose que $f \leq g$ sur I . Alors

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g = -\infty$.

Remarque 16

Une seule inégalité suffit mais elle doit être dans le bon sens !

Exemple : Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}$

2.3 Limite des fonctions monotones

Théorème 17 (théorème de la limite monotone)

On se place sur un intervalle $I = [a, b[$ ($a < b$), où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone alors f admet une limite (finie ou infinie) en b .

Plus précisément :

- si f est croissante et majorée sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ est finie.
- si f est croissante et non majorée sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.
- si f est décroissante et minorée sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ est finie.
- si f est décroissante et non minorée sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$.

On a bien sûr le résultat analogue pour une limite au bord gauche de l'intervalle :

Théorème 18 (théorème de la limite monotone (redite))

On se place sur un intervalle $I =]a, b]$ ($a < b$), où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone alors f admet une limite (finie ou infinie) en a .

Plus précisément :

- si f est croissante et sur $]a, b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ est finie.
- si f est croissante et sur $]a, b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$
- si f est décroissante et sur $]a, b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ est finie.
- si f est décroissante et sur $]a, b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

Remarque 19

Dans le cas d'une limite finie, ce théorème n'en donne pas la valeur.

Proposition 20

Soient $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est croissante alors f possède en tout point de $x_0 \in]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite toutes les deux **finies** et :

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

Exemple : la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

Démonstration : Soit $x_0 \in]a, b[$. On applique le théorème de la limite monotone sur l'intervalle $]a, x_0[$: