

NOM :

PRENOM :

Question 1. (/ 2 pts) Donner la définition d'un système complet d'événements.

$(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ lorsque :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, \text{ et } \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ si } i \neq j \text{ alors } A_i \cap A_j = \emptyset$$

Question 2. (/ 3 pts) Énoncer la formule des probabilités composées.

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$

alors $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

Question 3. (/ 5 pts) Dans une classe de 30 élèves il y a 10 garçons et 20 filles. Le professeur interroge un élève au hasard pour sa première question, puis il interroge un autre élève au hasard pour sa deuxième question. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note F_i l'événement "l'élève interrogé à la question numéro i est une fille". Déterminer la probabilité qu'une fille soit interrogée à la deuxième question.

D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(F_1, \bar{F}_1)$ on a :

$$P(F_2) = P(F_1) P_{F_1}(F_2) + P(\bar{F}_1) P_{\bar{F}_1}(F_2)$$

et d'après l'énoncé : $P(F_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ donc $P(\bar{F}_1) = 1 - P(F_1) = \frac{1}{3}$

$$\bullet P_{F_1}(F_2) = \frac{19}{29}$$

$$\bullet P_{\bar{F}_1}(F_2) = \frac{20}{29}$$

$$\text{Donc } P(F_2) = \frac{2}{3} \times \frac{19}{29} + \frac{1}{3} \times \frac{20}{29}$$

NOM :
PRENOM :

Question 1. (/ 2 pts) Donner la définition d'une mesure de probabilité sur un ensemble fini Ω .

On dit que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ lorsque
 $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ vérifie $P(\Omega) = 1$ et
 pour tous $A, B \subset \Omega$ tels que $A \cap B = \emptyset$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Question 2. (/ 3 pts) Énoncer la formule de Bayes.

Pour A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$
 on a $P_B(B) = P_A(A) \times \frac{P(B)}{P(A)}$

Question 3. (/ 5 pts) Dans une classe de 30 élèves il y a 10 garçons et 20 filles. Le professeur interroge un élève au hasard pour sa première question, puis il interroge un autre élève au hasard pour sa deuxième question. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note G_i l'événement "l'élève interrogé à la question numéro i est un garçon". Déterminer la probabilité qu'un garçon soit interrogé à la deuxième question.

D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(G_1, \bar{G}_1)$ on a :

$$P(G_2) = P(G_1) P_{G_1}(G_2) + P(\bar{G}_1) P_{\bar{G}_1}(G_2)$$

et d'après l'énoncé :

$$\bullet P(G_1) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad P(\bar{G}_1) = 1 - P(G_1) = \frac{2}{3}$$

$$\bullet P_{G_1}(G_2) = \frac{9}{29} \quad \text{et} \quad P_{\bar{G}_1}(G_2) = \frac{10}{29}$$

$$\text{Donc} \quad P(G_2) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{29} + \frac{2}{3} \times \frac{10}{29}$$