

Calculs de limites de fonctions

Récapitulons toutes les techniques pour déterminer une limite (voir les feuilles de remédiation 7 et 8 et la feuille de cours 10 pour les détails). Dans l'ordre dans lequel les utiliser :

1. Connaître les limites des fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, puissances, fonctions trigonométriques)
2. Utiliser les opérations sur les limites (somme, produit, quotient), attention alors à deux points :
 - les limites de la forme " $\frac{1}{0}$ " où il faut utiliser des inégalités pour déterminer si le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^-
 - l'existence de 4 formes indéterminées :
3. Savoir utiliser le théorème de composition des limites rappelé dans la proposition 1 ci-dessous.
4. Pour lever une forme indéterminée, mettre en facteur le terme dominant.
5. Pour aider à l'identification du terme dominant, connaître les croissances comparées rappelées dans la proposition 2 ci-dessous.
6. Dans le cas d'une différence de racines on peut penser à utiliser la quantité conjuguée. Dans le cas d'une limite d'une fonction de la forme $f(x)^{g(x)}$ il est obligatoire d'écrire $f(x)^{g(x)} =$
7. Si aucune des méthodes précédentes n'est suffisante, utiliser un équivalent, ils sont rappelés dans la proposition 3 ci-dessous.

Proposition 1 (composition de limites)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, soit x_0 un point de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$), et soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\text{Si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \text{ et } g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \ell} \ell' \text{ alors } g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'.$$

Proposition 2 (croissances comparées)

Soient $\alpha, \beta > 0$ et soit $a > 1$, on a :

$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \text{ et}$ $2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$	$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} x ^\alpha a^x = 0$ $4. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x ^\beta = 0.$
---	--

Remarque :

En particulier avec $a = e$ et $\alpha = \beta = 1$ on retrouve les limites usuelles suivantes (à bien connaître) :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} =$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} =$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} =$
---	--

Démonstration :

Définition 1

Soient f et g deux fonctions définies et non nulles au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f et g sont équivalentes en a et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

Proposition 3 (équivalents usuels)

On a les équivalents suivants en 0 :

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ • en particulier, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ |
|---|--|

Démonstration : tous ces équivalents sauf le dernier sont issus du fait que, si $f'(0) \neq 0$ alors $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)$ donc $f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)x$. Pour le cosinus, on écrit $\cos(x) - 1 = -2\sin^2(\frac{x}{2})$ puis on conclut avec l'équivalent de sin.

Remarque :

Comme avec les suites, les équivalents sont adaptés à des opérations multiplicatives : on peut multiplier, diviser, mettre à une puissance constante des équivalents. En revanche, on ne peut PAS additionner des équivalents, ni composer un équivalent par une fonction quelconque.

Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$ alors :

- $f_1(x) \times f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) \times g_2(x)$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante $f_1(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)^\alpha$
- mais $f_1(x) + f_2(x) \not\underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$ et pour h une fonction quelconque $h(f_1(x)) \not\underset{x \rightarrow a}{\sim} h(g_1(x))$

En revanche, on peut “composer avec des équivalents” au sens de la proposition suivante :

Proposition 4 (utilisation des équivalents via composition)

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $h(J) \subset I$, soient x_0 un point de J ou de son bord et a un point de I ou de son bord (éventuellement $x_0, a \in \{\pm\infty\}$).

$$\text{Si } h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a \text{ et si } f(y) \underset{y \rightarrow a}{\sim} g(y) \text{ alors } f(h(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(h(x)).$$

Démonstration :

Exercice 1

Donner un équivalent simple des expressions suivantes :

1. $\cos(3x) - 1$ en 0
2. $\ln(1 + \sin(x))$ en 0

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(e^x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1}$ 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ | <ol style="list-style-type: none"> 8. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^4 - 2x}$ 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^4 - 2x}$ 11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 \ln x}$ 12. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$ 13. $\lim_{x \rightarrow 0^-} -3 \ln(-x) - \frac{2}{x}$ 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - 3x$ | <ol style="list-style-type: none"> 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$ 16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$ 18. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-\frac{1}{x}}$ 19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+2x} - 1}$ 20. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ |
|--|--|--|