Exercice 1
Etudier la limite en 0 des fonctions données par les expressions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 - e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{x} - \sqrt{-\dfrac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 2
Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Quelle condition doivent satisfaire a et b pour que f ait une limite en 1 ?
2. On suppose la condition précédente satisfaite. Quelle condition supplémentaire doivent satisfaire a et b pour que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ait une limite en 1 finie ? *On commencera par réécrire la définition de la fonction $g(x)$ en fonction de x.*

Exercice 3
1. Montrer que la fonction $(x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x}))$ n'a pas de limite en 0.
2. Etudier la limite de $(x \mapsto e^x \sin x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. *On pourra intuiter le résultat en traçant le graphe de cette fonction sur Geogebra :* `https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`

Exercice 4
Le but de cet exercice est de démontrer le résultat de croissance comparée énoncé en cours :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

On fixe $\alpha, \beta > 0$ et on considère un réel γ tel que $0 < \gamma < \dfrac{\alpha}{\beta}$.

1. Montrer que $\forall x \geq 1, \ \ln x \leq x$.
2. En déduire que $\forall x \geq 1, \ \ln x \leq \dfrac{x^\gamma}{\gamma}$.
3. En déduire un encadrement de $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ valable pour tout $x > 1$.
4. Conclure.