Programme de colles : semaine 22, du 24/3 au 28/3

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Probabilités finies

Les élèves peuvent dessiner des arbres de probabilités au brouillon, mais ceux-ci ne constituent pas une preuve.

- vocabulaire probabiliste : expérience aléatoire, univers, évènement, évènement élémentaire, contraire, impossible, certain, incompatibles
- interprétation de l'union, l'intersection, et le complémentaire d'évènements
- notion de système complet d'évènements
- probabilité sur un univers fini, formules $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ si les A_i sont deux à deux incompatibles. Enfin, si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $pi \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
- situations d'équiprobabilité, lien avec le dénombrement
- probabilités conditionnelles : on note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité de A sachant B, formule et interprétation
- pour B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application $\mathbb{P}_B : A \longmapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. En particulier, $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(\overline{A})$, $\mathbb{P}_B(A \cup A') = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A') - \mathbb{P}_B(A \cap A')$, etc.
- formule des probabilités composées
- formule des probabilités totales. *On donne ce nom indifféremment aux deux formules $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$ et $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$ valables si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'évènements.*
- formule de Bayes. Exemple d'utilisation de la formule de Bayes combinée avec la formule des probabilités totales
- indépendance de deux évènements : définition et interprétation. Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$
- si A et B sont indépendants alors il en est de même de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B, et de $\overline{A}$ et $\overline{B}$
- indépendance de n évènements : évènements deux à deux indépendants, mutuellement indépendants. La mutuelle indépendance implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse. *Un exemple d'évènements deux à deux indépendants mais non mutuellement indépendants a été donné.*
- si les évènements $(A_1, \dots, A_n)$ sont indépendants alors les évènements $(B_1, \dots, B_n)$ le sont aussi où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.

2 Limites de fonctions

- définition (ε, η) d'une limite finie ou infinie en un point ou à l'infini. *La définition doit être connue, mais sa manipulation ne doit pas être au coeur des exercices demandés*
- limite à gauche/à droite, notation $f(x_0^-)/f(x_0^+)$
- une fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en un point x_0 de son ensemble de définition si et seulement si $\lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0) = \ell$
- caractérisation séquentielle de la limite. Application : montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas en exhibant (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$, $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$ et $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, $f(v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell' \neq \ell$
- si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est bornée au voisinage de x_0
- si $a < \ell < b$ alors $a < f < b$ au voisinage de x_0
- passage à la limite dans les inégalités larges
- théorèmes d'encadrement ("gendarmes") et de comparaison

- limite des fonctions monotones : toute fonction monotone $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite (finie ou infinie) en b. Application : si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante alors pour tout $x_0 \in]a, b[$, $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$
- calcul pratique de limites :
  - composition de limites, opérations algébriques, formes indéterminées
  - méthodes pour lever une indétermination : factorisation par le terme dominant, utilisation de la quantité conjuguée, retour à l'exponentielle pour les puissances
- croissances comparées : pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$, $(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{<<} x^\alpha \underset{+\infty}{<<} a^x$ où $f(x) \underset{+\infty}{<<} g(x)$ signifie $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = \lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$
- fonctions équivalentes, propriétés similaires à celles pour les suites équivalentes
- équivalents usuels : $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x$.

3 Questions de cours

Cette semaine, les colles suivront le schéma suivant :

A) un calcul de limite, voir Feuille de remédiation 12, exo 2 : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5892`

B) une question de cours issue de la liste ci-dessous

C) énoncer une des formules suivantes et l'appliquer sur un exemple choisi par l'examinateur : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

D) exercices au choix du colleur

1. Donner la définition d'un système complet d'évènements d'un espace probabilisé. Quelle formule sur les probabilités a-t-on dans ce cas ?
2. Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini.
3. Donner et démontrer la formule donnant $\mathbb{P}(\overline{A})$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.
4. Démontrer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
5. Donner la définition de "A et B sont deux évènements indépendants", puis démontrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B (ou, au choix de l'examinateur, A et $\overline{B}$) le sont aussi.
6. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $I \subset \mathbb{R}$. Donner une des neuf définitions avec des quantificateurs de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ pour un choix de $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fait par l'examinateur.
7. Montrer que la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.
8. Énoncer un ou plusieurs des équivalents usuels pour les fonctions (voir liste ci-dessus).
9. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Donner la définition de : "f est continue en x_0". Illustrer cette définition par les graphes d'une fonction continue et d'une fonction discontinue en x_0. *(Aucun exercice autre que cette question de cours ne sera donné sur la notion de continuité.)*

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.