

exo 15

Notons P_k : "l'archer réussit le tir à 20 mètres au k^{ème} tir"

Q_k : _____ 50 _____

Lorsqu'il commence par la cible à 20 m., l'archer remporte son pari lorsque l'événement

$$A = (P_1 \cap Q_2) \cup (Q_2 \cap P_3) \text{ est réalisé}$$

lorsqu'il commence par la cible à 50 m., c'est lorsque

$$B = (Q_1 \cap P_2) \cup (P_2 \cap Q_3) \text{ l'est.}$$

Calculons donc $P(A)$ et $P(B)$.

Et après la formule $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

On a :

$$P(A) = P(P_1 \cap Q_2) + P(Q_2 \cap P_3) - P(P_1 \cap Q_2 \cap P_3)$$

Et comme les tirs sont indépendants et que

$\forall k \in \{1, 2, 3\}, P(P_k) = p$ et $P(Q_k) = q$, on a en fait

$$\begin{aligned} P(A) &= P(P_1)P(Q_2) + P(Q_2)P(P_3) - P(P_1)P(Q_2)P(P_3) \\ &= pq + qp - pqp = pq(2-p) \end{aligned}$$

Similairement : $P(B) = pq(2-q)$.

Or, $p > q$ donc $0 < 2-p < 2-q$ et comme $pq \geq 0$ on en déduit que $pq(2-p) \leq pq(2-q)$ i.e. $P(A) \leq P(B)$

↳ l'archer a donc intérêt à commencer par la cible à 50 mètres → la prise de risque est payante !