

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition puis justifier par une phrase qu'elle est continue sur cet ensemble.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 2e^x$
2. $g : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$
3. $h : x \mapsto \frac{x^4 - 1}{3 + 2x + x^2}$
4. $u : x \mapsto \sqrt{1 + |x|}$
5. $v : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(x)}$

Exercice 2

Les fonctions suivantes sont-elles continues en x_0 ?

1. $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 2x - 6 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$.
2. $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\ln(x)} & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{0, 1\} \end{cases}$ en $x_0 \in \{0, 1\}$.

Exercice 3

Déterminer le plus grand ensemble sur lequel les fonctions suivantes sont continues, puis préciser si elles sont prolongeables par continuité en x_0 .

1. $f_1 : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$ en $x_0 = 1$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ en $x_0 = 3$.
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$ en $x_0 = 2$
4. $f_4 : x \mapsto (x-1) \ln(x^2 - 1)$ en $x_0 \in \{-1, 1\}$
5. $f_5 : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ en $x_0 = 0$.
6. $f_6 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$ en $x_0 = 1$.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f .
2. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
3. Déterminer f^{-1} .

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est constante.
2. Étudier la limite de (u_n) .
3. Conclure que f est constante.

Exercice 6

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = e^x.$$

Montrer que $f = \exp$ ou $f = -\exp$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(x)^2.$$

Montrer que g est constante.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x > 0, f(x) = x^2 + \ln(x).$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$.
2. Montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x + x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation

$$(E_n) : f(x) = n.$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera x_n .
2. Déterminer le sens de variation de (x_n) .

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln n \geq x_n \geq \ln(n - \ln n).$$

4. En déduire la limite de (x_n) puis montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(u_{n+1}) < 0$.
4. En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge.
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}.$$

6. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution $v_n \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < v_n < \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en déduit-on sur (v_n) ?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \frac{e^{-v_n}}{n}.$$
5. En déduire un équivalent de v_n quand $n \rightarrow +\infty$.