

Exercice 2

- 1) $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $\cos(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ donc $\boxed{\cos(e^x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1}$
- 2) $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$ et $e^y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\boxed{e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty}$
- 3) $x+1 \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} 0^-$ car $x < -1 \Rightarrow x+1 < 0$
et $x-1 \xrightarrow{x \rightarrow -1} -2$ } donc $\boxed{\frac{x+1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} +\infty}$
- 4) $\boxed{x^2 e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0}$ par C.C.
- 5) $x^{1/x} = \exp(\frac{1}{x} \ln(x))$ or $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par C.C. et $e^y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ donc $\boxed{x^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}$
- 6) Comme $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $\sinh(2x) \sim 2x$. Donc $\frac{e^x - 1}{\sinh(2x)} \sim \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{\frac{e^x - 1}{\sinh(2x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}}$
- 7) $x-1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0^+$ car si $x > 1$ alors $x-1 > 0$ donc $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$
Or $e^y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\boxed{\exp(\frac{1}{x-1}) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty}$
- 8) $x-1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0^-$ car si $x < 1$ alors $x-1 < 0$ donc $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$
Or $e^y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$ donc $\boxed{\exp(\frac{1}{x-1}) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0}$
- 9) $\frac{x^2+3x}{x^4-2x} = \frac{x+3}{x^3-2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{-\frac{3}{2}}$
- 10) $\frac{x^2+3x}{x^4-2x} = \frac{x^2}{x^4} \times \frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{0}$ car $\frac{1}{x^2}, \frac{3}{x}, \frac{2}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- 11) $x^2 \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^-$ par C.C. car pour $0 < x < 1$ on a $x^2 > 0$ et $\ln(x) < 0$
donc $x^2 \ln(x) < 0$. Donc $\boxed{\frac{1}{x^2 \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty}$
- 12) $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0^+$ (car si $x > 1$ alors $\ln(x) > 0$) et $y \ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0$ par C.C.
Donc par composition de limites $\boxed{\ln(x) \ln(\ln(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0}$

Exercice 2 (remédiation 13, sub 6)

13) $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0^+$ et $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} -\infty$ donc $\ln(-x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$

et $\frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$. Donc $-3\ln(-x) - \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$

14) (pas besoin de quantité conjuguée ici) Pour $x > 0$,

$$\sqrt{x^2+2} - 3x = \sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})} - 3x = \underbrace{\sqrt{x^2}}_{=x \text{ car } x>0} \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - 3x$$

$$= x \left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - 3 \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \text{ car } \frac{2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

15) (ici on a besoin d'une quantité conjuguée) Pour $x > 0$,

$$\sqrt{x^2+2} - x = \frac{(\sqrt{x^2+2} - x)(\sqrt{x^2+2} + x)}{\sqrt{x^2+2} + x} = \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2} + x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2} + x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

16) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 1} 0$. Donc $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

17) $xe^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}$. Or $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $\frac{e^y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc $xe^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

18) $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$ et $\sqrt{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\sqrt{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$

19) $\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+2x}-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}(2x)} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+2x}-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$

20) $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$ Or $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$

Donc $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Or $e^y \xrightarrow{y \rightarrow 1} e$. Donc $(1+x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e$