Programme de colles : semaine 23, du 31/3 au 4/4

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Limites de fonctions

- définition (ε, η) d'une limite finie ou infinie en un point ou à l'infini. *La définition doit être connue, mais sa manipulation ne doit pas être au coeur des exercices demandés*
- limite à gauche/à droite, notation $f(x_0^-)/f(x_0^+)$
- une fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en un point x_0 de son ensemble de définition si et seulement si $\lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0) = \ell$
- caractérisation séquentielle de la limite. Application : montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas en exhibant (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ et $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' \neq \ell$
- si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est bornée au voisinage de x_0
- si $a < \ell < b$ alors $a < f < b$ au voisinage de x_0
- passage à la limite dans les inégalités larges
- théorèmes d'encadrement (“gendarmes”) et de comparaison
- limite des fonctions monotones : toute fonction monotone $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite (finie ou infinie) en b. Application : si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante alors pour tout $x_0 \in]a, b[$, $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$
- calcul pratique de limites :
  - composition de limites, opérations algébriques, formes indéterminées
  - méthodes pour lever une indétermination : factorisation par le terme dominant, utilisation de la quantité conjuguée, retour à l'exponentielle pour les puissances
  - croissances comparées : pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$, $(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{<<} x^\alpha \underset{+\infty}{<<} a^x$ où $f(x) \underset{+\infty}{<<} g(x)$ signifie $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$
  - fonctions équivalentes, propriétés similaires à celles pour les suites équivalentes
  - équivalents usuels : $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.

2 Continuité

- continuité en un point du domaine, continuité à gauche / à droite, sur un ensemble *(la définition de la continuité avec des quantificateurs doit être comprise mais ne sera pas au cœur des exercices demandés)*
- prolongement par continuité en un point
- caractérisation séquentielle de la continuité.
  Application 1 : montrer qu'une fonction f n'est pas continue en x_0 en exhibant une suite (u_n) telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ mais $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$
  Application 2 : si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur I, et si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$
- Savoir faire une phrase pour justifier qu'une fonction est continue en tant que somme, produit, quotient ou composée de fonctions continues *(on sera particulièrement attentif aux ensembles de départ et d'arrivée dans le cas d'une composée)*

- théorème des valeurs intermédiaires, preuve par dichotomie
  Reformulation : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
  Application 1 : si f est une fonction continue ne s'annulant pas sur un intervalle I alors f est de signe constant sur I
  Application 2 : si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors $\exists x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 0$. Un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.
- extrema sur un segment : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
- théorème de la bijection : soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, $f : I \longrightarrow J$ est bijective et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et de même monotonie que f
- étude de suites implicites du type $u_n = f^{-1}(n)$ ou $u_n = f_n^{-1}(0)$

3 Informatique en langage Python

- chaînes de caractères :
  - parcours d'une chaîne par ses éléments, par ses indices
  - sous-chaînes `C[p:q]`, `C[p:]`, `C[:q]`, `C[p:q:r]`
  - non mutabilité
  - création d'une chaîne depuis la chaîne vide `c=""` puis concaténations successives `c=c+car`

4 Questions de cours

Cette semaine, les colles suivront le schéma suivant :

A) un calcul de limite, voir Feuille de remédiation 12, exo 2 :
`https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5892`

B) une question de cours issue de la liste ci-dessous

C) exercices au choix du colleur

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $I \subset \mathbb{R}$. Donner une des neuf définitions avec des quantificateurs de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ pour un choix de $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fait par l'examinateur.
2. Montrer que la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Énoncer un ou plusieurs des équivalents usuels pour les fonctions (voir liste ci-dessus).
4. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Donner la définition de : "f est continue en x_0". Illustrer cette définition par les graphes d'une fonction continue et d'une fonction discontinue en x_0.
5. Soit $I \subset \mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue et soit (u_n) une suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.
6. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$ (ou de toute autre fonction relativement simple choisie par l'examinateur) puis justifier que f est continue sur cet ensemble.
7. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et l'expliquer sur un dessin.
8. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.
9. Écrire une fonction `compte` prenant en argument une chaîne de caractères `texte` et un caractère `lettre` et renvoyant le nombre de fois que `lettre` apparaît dans `texte`.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.