Expériences aléatoires, probabilités TP20

Exercice 1 Premières simulations

Dans cet exercice, on utilise les fonctions de la bibliothèque `random` *pour simuler des expériences aléatoires. On testera plusieurs fois les fonctions obtenues et on comparera ses résultats avec son voisin.*

Q1 On lance un dé classique. Écrire une fonction `lancer_de` ne prenant rien en argument et renvoyant le résultat du dé.

Q2 On dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule verte. Écrire une fonction `tirer` ne prenant rien en argument et simulant le tirage d'une boule dans l'urne. La fonction renverra "`B`", "`R`" ou "`V`" suivant la couleur de la boule tirée.

Q3 On garde la même urne que dans la question précédente. Écrire une fonction `tirer_suc` prenant en argument un entier n et simulant le tirage *successif avec remise* de n boules dans l'urne. On renverra le résultat sous forme d'une liste contenant les couleurs des boules tirées.

Q4 Toujours avec la même urne, écrire une fonction `tirer_sim` prenant en argument un entier $n \leq 6$ et simulant le tirage *simultané* de n boules dans l'urne. On renverra le résultat sous forme d'une liste contenant les couleurs des boules tirées.

Q5 Écrire une fonction prenant en argument un réel $p \in [0,1]$ et renvoyant `"bonjour"` avec probabilité p et `"au revoir"` avec probabilité $1-p$. Tester votre fonction (plusieurs fois) avec $p = 0,9$ et avec $p = 0,1$.

Q6 Écrire une fonction `jour` ne prenant rien en argument et renvoyant `"lundi"` avec probabilité $0,2$, `"mardi"` avec probabilité $0,7$ et `"mercredi"` avec probabilité $0,1$.

Exercice 2 Premières estimations

On reprend la fonction `lancer_de` écrite à l'exercice précédent.

Q1 On lance le dé N fois de suite, et on compte le nombre de fois, noté X, où on obtient 6. Écrire une fonction `repete_de` prenant en entrée un entier N et renvoyant la valeur X.

Q2 En déduire une fonction `fréquence` prenant en argument l'entier N et renvoyant la fréquence d'apparition du résultat 6, c'est-à-dire la quantité $\dfrac{X}{N}$.

Q3 Pour N grand, quelle doit être intuitivement la valeur de cette fréquence ? Vérifier avec l'ordinateur.

Q4 Tracer l'évolution de la fréquence d'apparition du 6 en fonction de N. Visualiser sur le graphique le résultat de la question précédente.

Dans les questions ci-dessous on reprend cette technique pour estimer d'autres probabilités.

Q5 On reprend la fonction `jour` écrite à l'exercice précédent. Écrire un code Python permettant de vérifier que cette fonction renvoie bien `"lundi"` avec probabilité $0,2$.

Q6 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire d au hasard sans remise et on note Y le nombre de numéros pairs tirés. Écrire une fonction `nb_pair` prenant en arguments n et d et simulant le résultat Y de cette expérience. *On pourra commencer par créer une liste correspondant au contenu de l'urne.*

Q7 Estimer à l'aide de Python la probabilité que $Y = 0$. On vérifiera que cette probabilité est proche de 0.222 dans le cas $n = 10$ et $d = 2$.

Exercice 3 Trivial

Bob joue au Trivial Pursuit, mais n'est pas cultivé dans tous les domaines. Pour simplifier on suppose qu'il y a uniquement trois catégories de questions :

- les questions "Histoire" pour lesquelles Bob a la bonne réponse dans 90% des cas,
- les questions "Littérature" pour lesquelles Bob a la bonne réponse dans 60% des cas,
- et les questions "Sport" pour lesquelles Bob a la bonne réponse dans 30% des cas.

On suppose encore pour simplifier que lorsque c'est son tour de jouer, Bob a une chance sur trois de tomber sur une case de chacune des catégories.

Q1 Écrire une fonction `réponse` ne prenant rien en argument et renvoyant `True` si Bob donne la bonne réponse, et `False` sinon. *On commencera par utiliser une variable permettant de modéliser sur quelle case est tombé Bob.*

Q2 Écrire un programme Python permettant d'estimer quelle est la probabilité que Bob donne la bonne réponse. *On doit trouver environ* $0,6$.

Q3 Écrire une fonction `essais` prenant en argument un entier N et simulant N tours de jeu. Votre fonction doit renvoyer `True` si Bob donne au moins une bonne réponse sur les N tours.

Exercice 4 Une marche aléatoire 1D

Q1 Écrire une fonction `pas` renvoyant 1 avec probabilité 0.15, 2 avec probabilité 0.25, et 3 avec probabilité 0.6.

Q2 Un pion initialement situé à l'origine d'un axe gradué de 1 en 1 se déplace selon la règle suivante : à chaque temps $n \in \mathbb{N}$, il se déplace d'un nombre aléatoire d'unités vers la droite. Ce nombre est égal à 1 dans 15% des cas, à 2 dans 25% des cas, et à 3 dans 60% des cas. Écrire une fonction renvoyant la position du pion après 10 déplacements.

Q3 Estimer la probabilité que le pion soit à la position 25 après 10 coups.

Q4 En moyenne, à quelle position est le pion après 10 coups ?

Exercice 5 Matrices inversibles

Q1 Compléter le rappel de mathématiques suivant :

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\det(A) =$ ....

et A est inversible si et seulement si $\det(A)$ ....

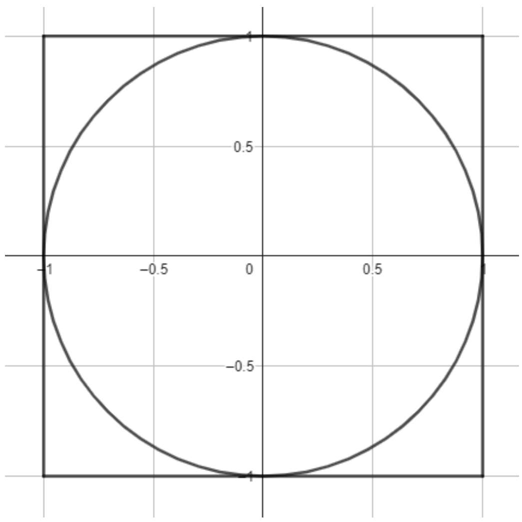
Q2 Écrire une fonction prenant en argument une matrice carrée de taille 2 et décidant si elle est inversible. Testez votre fonction.

Q3 Écrire une fonction créant une matrice de taille 2 dont les coefficients sont choisis uniformément au hasard dans $[0, 1]$.

Q4 Estimer la probabilité qu'une telle matrice aléatoire soit inversible. Le résultat trouvé signifie-t-il que toutes les matrices sont inversibles ?

Exercice 6 Fléchettes

On considère un carré $\mathcal{C}$ de côté 2 contenant un disque $\mathcal{D}$ de rayon 1, tous les deux centrés en l'origine comme sur la figure ci-dessous. On place un point $M(x, y)$ au hasard dans le carré $\mathcal{C}$, et on s'intéresse à la probabilité que M appartienne au dique $\mathcal{D}$.



Q1 Quelle est l'aire de $\mathcal{D}$?

Q2 Quelle est la probabilité que M appartienne à $\mathcal{D}$?

Q3 En déduire un code Python permettant d'obtenir une approximation de π.