Exercice 1

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E.
   (a) $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x+y-z+3t=0\}$ avec $E=\mathbb{R}^4$
   (b) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ P(-X)=P(X)\}$ avec $E=\mathbb{R}[X]$
   (c) $F_3 = \{f \in E \ : \ \int_0^1 f = 0\}$ où E est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$

2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E ? Justifier.
   (a) $G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x+y=x+2y\}$ avec $E=\mathbb{R}^2$
   (b) $G_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x+y-2z+1=0\}$ avec $E=\mathbb{R}^3$
   (c) $G_3 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \ a,b \in \mathbb{R}\}$ avec $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   (d) $G_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq y\}$ avec $E=\mathbb{R}^2$
   (e) $G_5 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que f est paire$\}$ avec $E=\mathbb{R}^\mathbb{R}$

Exercice 2

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoiel sous-jacent et en donner une famille génératrice :

1. $F_1 = \{(x-y, x+2y), \ x,y \in \mathbb{R}\}$
2. $F_2 = \{(x+2y, x-z, z+y+2x), \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$
3. $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+2y-3z=0\}$
4. $F_4 = \{\begin{pmatrix} x & x+y \\ -y & y \end{pmatrix}, \ x,y \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3

1. Démontrer que $E = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ y(2)=y(-1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
2. On note $f : x \longmapsto x^2-x$, $g : x \longmapsto \cos((x-2)(x+1))$ et $h : x \longmapsto 7$.
   On note $F = Vect(f,g,h)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ engendré par ces 3 fonctions.
   Démontrer que $F \subset E$.

Exercice 4 (familles génératrices)

1. Montrer que $\big((0,1,2),(1,0,2),(2,1,0)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(t+s-r, t+r, s), \ t,s,r \in \mathbb{R}\}$.
3. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y-2z=x+y=0\}$.

Exercice 5 (familles libres)

1. Montrer que $\big((0,1,2),(1,0,2),(2,1,0)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que (A, B, C) est une famille libre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\big((1,3,-1),(2,0,1),(0,6,-3)\big)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

1. Soient $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.
2. Montrer que la famille $\big((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.
3. Montrer que la famille $\big((1,i,-i),(i,0,-1),(1,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.

Exercice 7

1. Soit $F_1 = \{(t+s-r, 2t-3s-r, 3t-7s-r)\ ,\ t,s,r \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Déterminer une famille génératrice de F_1.
   (b) Cette famille est-elle une base de F_1 ?
   (c) Déterminer une base de F_1 formée de vecteurs de cette famille.
2. Mêmes questions avec
   $F_2 = \{(2a+b+2d, 2a+2b+2c+d, 4a-4c+d, 2a+b),\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$.
3. Mêmes questions avec $F_3 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ où
   $u_1 = (2,-1,-1),\ u_2 = (-1,2,3),\ u_3 = (1,4,7)$ et $u_4 = (1,1,2)$.

Exercice 8

Soient $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ x = y\}$.

1. Déterminer la dimension de E.
2. Déterminer la dimension de F.
3. Déterminer la dimension de $E \cap F$.

Exercice 9

1. Déterminer une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille 2).

Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille n).
3. Déterminer une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n).

Exercice 10
Soient $E = \text{Vect}\Big((-1,2,1,0),\ (-1,2,0,1)\Big)$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ y = -2z + t\}$.

1. Montrer que E et F sont des s.e.v de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de F.
3. Quelle est la dimension de E ?
4. Déterminer un système d'équations cartésiennes de E.
5. Soit $G = E \cap F$. Déterminer une base et la dimension de G.

Exercice 11
On définit les ensembles suivants :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ -2a-c \\ c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\ :\ x+y+z+t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $E \subset F$.
3. Que vaut $dim(E)$?
4. En déduire la dimension de F.

Exercice 12
Soient les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\ \text{et}\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les familles (u_1,u_2), (u_2,u_3) et (u_1,u_3) sont libres.
2. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ?
3. Quelle propriété fausse cet exercice met-il en lumière ?

Exercice 13
On considère l'ensemble E formé des suites réelles vérifiant la relation de récurrence
$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$, c'est-à-dire que :

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}.$$

1. Sans donner la forme explicite des éléments de E, montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. En donnant la forme explicite des éléments de E (voir le cours sur les suites récurrentes linéaires du début d'année), déterminer une famille génératrice de E.
3. Montrer que la famille génératrice trouvée à la question précédente est une base de E.
4. Exprimer les coordonnées de tout vecteur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dans cette base. On donnera le résultat en fonction de u_0 et de u_1.

Exercice 14
Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. (u_1,u_2,u_3,u_4) où $u_1 = (1,2,2,1),\ u_2 = (5,6,6,5),\ u_3 = (-1,-3,4,0),\ u_4 = (0,4,-3,-1)$.
2. (u_1,u_2,u_3,u_4) où $u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (2,1,2,1),\ u_3 = (1,-1,1,-1),\ u_4 = (0,1,0,1)$.

Exercice 15
Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de λ la famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $(u_1-\lambda e_1, u_2-\lambda e_2, u_3-\lambda e_3)$ où $u_1 = (3,2,-1),\ u_2 = (2,-1,1),\ u_3 = (-4,4,-1)$ et où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. (u_1,u_2,u_3) où $u_1 = (\lambda,1,1),\ u_2 = (1,\lambda,-1),\ u_3 = (1,1,\lambda)$.