

TD 16 : exo 7

1) $\forall x > 0, f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ donc $f \nearrow \nearrow$ sur $\mathbb{R}_*^+$ donc $f: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow f(\mathbb{R}_*^+)$ est une bijection.

De plus f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et on calcule que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, donc $f(\mathbb{R}_*^+) = \mathbb{R}$.

Finalement $f: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection donc, comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha = f^{-1}(0)$.

2) On calcule que

$$\bullet f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln(2) < 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \frac{1}{4} < \ln(2) \text{ car } 1 < 4\ln(2) \\ \text{car } 1 < \ln(2^4) \text{ car } e < 2^4 \end{array} \right)$$

$$\bullet f(1) = 1 > 0$$

Ainsi $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < f(1)$.

Or $f \nearrow \nearrow$ sur $\mathbb{R}_*^+$ donc $f^{-1} \nearrow \nearrow$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) < f^{-1}(0) < f^{-1}(f(1)) \quad \text{càd} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$