
Mathématiques - mercredi 2 avril 2025
Devoir n^{o}7 Durée : 2 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet est constitué de 3 exercices indépendants.**

Exercice 1.

Les questions 1 à 4 sont indépendantes.

1. Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. (a) Justifier que la fonction $f : x \longmapsto \ln(x + \sqrt{e-x})$ est continue sur $[0, e]$.
   (b) Calculer $f(0)$ et $f(e)$. En déduire qu'il existe $c \in [0, e]$ tel que $f(c) = \dfrac{3}{4}$.
3. (a) Quand dit-on que deux évènements E et F sont indépendants ?
   (b) Soient A, B, A' et B' quatre évènements tels que $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$.
   Démontrer que si A et B sont indépendants et que $A \cap A'$ et $B \cap B'$ sont indépendants, alors $\mathbb{P}_{A\cap B}(A' \cap B') = \mathbb{P}_A(A') \times \mathbb{P}_B(B')$. *On démontrera également que ces probabilités conditionnelles existent.*
4. Dans une variante du jeu de Scrabble, on dispose d'un sac contenant 26 jetons : un pour chaque lettre de l'alphabet. Il y a donc 6 voyelles et 20 consonnes. On tire simultanément 7 lettres dans le sac.
   (a) Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
   (b) Quelle est la probabilité que le tirage contienne au moins une voyelle ? *On ne demande pas de simplifier le résultat numérique obtenu.*

Exercice 2.

Une pièce est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir "Face" vaut $p \in]0, 1[$. On lance successivement cette pièce et on note les résultats obtenus. On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, et on introduit les évènements suivants pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- F_n : "on obtient "Face" au n-ème lancer",
- D_n : "on obtient "Face" deux fois de suite pour la première fois aux lancers $n-1$ et n".

Par exemple, si on obtient les résultats suivants :

"Pile", "Face", "Pile", "Face", "Face", "Pile", "Face", "Face"

alors l'évènement D_5 est réalisé mais l'évènement D_8 ne l'est pas.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer la valeur de $u_n = \mathbb{P}(D_n)$ pour tout $n \geq 2$. On convient de plus que $D_1 = \emptyset$ et que $u_1 = 0$.

1. Déterminer la valeur de u_2.

2. (a) Démontrer que les évènements $\overline{F_1}$, $F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap \overline{F_2}$ forment un système complet d'évènements.
   (b) Soit $n \geq 3$. Justifier par une phrase que $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(D_n) = u_{n-1}$ et que $\mathbb{P}_{F_1 \cap \overline{F_2}}(D_n) = u_{n-2}$. Que vaut $\mathbb{P}_{F_1 \cap F_2}(D_n)$?
   (c) En déduire que pour tout $n \geq 3$, $u_n = (1-p)u_{n-1} + p(1-p)u_{n-2}$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = \dfrac{2}{3}$.
   On a donc, d'après la question précédente : $\forall n \geq 3,\ u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + \dfrac{2}{9}u_{n-2}$. *On précise qu'on peut aussi écrire ce résultat sous la forme :* $\forall n \geq 1,\ u_{n+2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{9}u_n$.
   (a) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{4}{9}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$.
   (b) Déterminer la valeur de $v_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right)$.
   (c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ et interprétez ce résultat.

Exercice 3.
Pour $n \geq 2$ un entier, on définit la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

On s'intéresse à l'équation $(E_n)\ :\ f_n(x) = 0$.

1. (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $[0,1]$.
   On la note u_n.
   (b) Déterminer la valeur de u_2.
2. (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq n\,u_n - 1 \leq 1$.
   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
   (c) Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} u_n^n$.
   (d) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. (a) Par une étude de fonction, démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ t \geq \ln(1+t)$.
   (b) En utilisant que $u_n \geq \dfrac{1}{n}$, en déduire que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n)$.
   (c) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} S_n$ où $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$.