DS 7 : Corrigé

Exercice 1

1) a) On a $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\sin(y) \xrightarrow[y\to 0]{} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Comme de plus $x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ on a donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty}$

b) On a $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\sin(y) \underset{y\to 0}{\sim} y$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

donc $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{x} = x$. Comme $x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ on a donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty}$

2) a) • Ecrivons $f = u\circ v$ avec $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto x+\sqrt{e-x}$

• Justifions que v est continue sur $[0,e]$. La fonction $x\mapsto e-x$ est continue sur $[0,e]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car : $\forall x\in[0,e]$, $x\leq e$ donc $e-x\geq 0$. Comme $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, v est continue sur $[0,e]$ par composition.

• Justifions que v est à valeurs dans $\mathbb{R}^+_*$. Pour $x\in]0,e]$ on a $x>0$ et $\sqrt{e-x}\geq 0$ donc $x+\sqrt{e-x}>0$; et pour $x=0$, $v(0)=\sqrt{e}>0$.

Ainsi on a bien : $\forall x\in[0,e]$, $v(x)>0$

• Finalement, v est continue sur $[0,e]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+_*$, et u est continue sur $\mathbb{R}^+_*$, donc f est continue sur $[0,e]$ par composition.

b) On calcule que $f(0)=\ln(0+\sqrt{e-0})=\ln(\sqrt{e})=\boxed{\frac{1}{2}}$

et que $f(e)=\ln(e+\sqrt{e-e})=\boxed{1}$

Dès lors, comme $f(0)\leq\frac{3}{4}\leq f(e)$ et que f est continue sur $[0,e]$, le théorème des valeurs intermédiaires indique qu'il existe $c\in[0,e]$ tel que $f(c)=\frac{3}{4}$.

3) a) Les évènements E et F sont dits indépendants lorsque $\boxed{\mathbb{P}(E\cap F)=\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)}$.

b) Comme $A\cap B\subset A$ on a $\mathbb{P}(A\cap B)\leq\mathbb{P}(A)$. Or $\mathbb{P}(A\cap B)>0$ donc $\mathbb{P}(A)>0$. De même $\mathbb{P}(B)>0$. Ainsi les probabilités conditionnelles proposées existent bien.

Comme A et B sont indépendants on a $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
Comme $A\cap A'$ et $B\cap B'$ le sont aussi on a $\mathbb{P}((A\cap A')\cap(B\cap B')) = \mathbb{P}(A\cap A')\mathbb{P}(B\cap B')$

Dès lors, on calcule que :

$$\mathbb{P}_{A\cap B}(A'\cap B') = \frac{\mathbb{P}((A\cap B)\cap(A'\cap B'))}{\mathbb{P}(A\cap B)} = \frac{\mathbb{P}((A\cap A')\cap(B\cap B'))}{\mathbb{P}(A\cap B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A\cap A')\,\mathbb{P}(B\cap B')}{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap A')}{\mathbb{P}(A)} \times \frac{\mathbb{P}(B\cap B')}{\mathbb{P}(B)} = \boxed{\mathbb{P}_A(A')\,\mathbb{P}_B(B')}$$

4) a) Comme on tire 7 lettres simultanément, un tirage correspond à une 7-combinaison de l'ensemble des 26 lettres. Il y en a $\boxed{\binom{26}{7}}$.

b) Notons Ω l'ensemble des tirages possibles et notons A l'ensemble des tirages contenant au moins une voyelle. Alors $\bar{A}$ est l'ensemble des tirages ne contenant que des consonnes donc $\mathrm{Card}(\bar{A}) = \binom{20}{7}$.
Comme on est dans une situation d'équiprobabilité on a donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\mathrm{Card}(\bar{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{20}{7}}{\binom{26}{7}}$$ et finalement, la probabilité demandée

est $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = \boxed{1 - \frac{\binom{20}{7}}{\binom{26}{7}}}$.

Exercice 2

1) L'évènement D_2 est réalisé lorsqu'on obtient "Face" aux 2 premiers lancers donc $\boxed{D_2 = F_1 \cap F_2}$. Comme les lancers sont indépendants on a donc

$$u_2 = \mathbb{P}(D_2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \boxed{p^2}$$

2) a) On a : • $\bar{F}_1 \cup (F_1\cap F_2) \cup (F_1 \cap \bar{F}_2) = \bar{F}_1 \cup (F_1 \cap (F_2 \cup \bar{F}_2)) = \bar{F}_1 \cup (F_1 \cap \Omega)$
$= \bar{F}_1 \cup F_1 = \boxed{\Omega}$

et • $\bar{F}_1 \cap (F_1 \cap F_2) = (\bar{F}_1 \cap F_1) \cap F_2 = \emptyset \cap F_2 = \boxed{\emptyset}$;
$\bar{F}_1 \cap (F_1 \cap \bar{F}_2) = (\bar{F}_1 \cap F_1) \cap \bar{F}_2 = \emptyset \cap \bar{F}_2 = \boxed{\emptyset}$

et $(F_1 \cap F_2) \cap (F_1 \cap \overline{F_2}) = F_1 \cap (F_2 \cap \overline{F_2}) = F_1 \cap \emptyset = \boxed{\emptyset}$

Ainsi $(\overline{F_1}, F_1 \cap F_2, F_1 \cap \overline{F_2})$ est un <u>système complet d'événements</u>.

b) • Si on a fait "Pile" au 1^{er} lancer, alors seuls les lancers suivants importeront pour connaître le rang d'apparition du premier "double Face", et ce rang sera décalé de 1. Ainsi $P_{\overline{F_1}}(D_n) = P(D_{n-1}) = \underline{u_{n-1}}$

• Si on a fait "Face" puis "Pile" aux 2 premiers lancers alors à nouveau le résultat "Pile" du 2^e lancer "remet le compteur à zéro" pour le rang d'apparition de "double Face", et ce rang sera décalé de 2. Ainsi $P_{F_1 \cap \overline{F_2}}(D_n) = P(D_{n-2}) = \underline{u_{n-2}}$.

• Comme $n \geqslant 3$, si on a fait "Face" aux 2 premiers lancers alors ce ne peut pas être aux $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancers qu'on fait "double Face" pour la <u>première</u> fois. Ainsi $\boxed{P_{F_1 \cap F_2}(D_n) = 0.}$

c) D'après la formule des <u>probabilités totales</u> dans le système complet d'événements $(\overline{F_1}, F_1 \cap F_2, F_1 \cap \overline{F_2})$ on a :

$$(*) \quad P(D_n) = P(\overline{F_1}) P_{\overline{F_1}}(D_n) + P(F_1 \cap F_2) P_{F_1 \cap F_2}(D_n) + P(F_1 \cap \overline{F_2}) P_{F_1 \cap \overline{F_2}}(D_n)$$

Par indépendance des 2 premiers lancers on a

$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) P(F_2) = p^2$ et $P(F_1 \cap \overline{F_2}) = P(F_1) P(\overline{F_2})$
$= P(F_1)(1 - P(F_2))$
$= p(1-p)$

Et aussi $P(\overline{F_1}) = 1 - P(F_1) = 1 - p$.

Ainsi grâce à la question b), la relation $(*)$ donne :

$$u_n = (1-p) u_{n-1} + p^2 \times 0 + p(1-p) u_{n-2}$$

soit $\boxed{u_n = (1-p) u_{n-1} + p(1-p) u_{n-2}.}$

3) a) La relation $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$ est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Le polynôme caractéristique associé est $X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{9}$ dont le discriminant vaut $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{9}\right) = 1$ et les racines $\frac{1/3+1}{2} = \frac{2}{3}$ et $\frac{1/3-1}{2} = -\frac{1}{3}$.

Ainsi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

On a vu que $u_2 = p^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ et l'énoncé donne $u_1 = 0$. On en déduit donc :

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 0 \\ \lambda\left(\frac{2}{3}\right) + \mu\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda\frac{2}{3} + \lambda\frac{1}{3} = \frac{4}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\frac{4}{9} \\ \lambda = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Finalement on a bien :

$$\forall n \geq 1,\ \boxed{u_n = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)}$$

b) Les événements $D_1, D_2, \dots, D_n$ sont 2 à 2 incompatibles puisque le rang d'apparition du premier "double face" est unique. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(D_k).$$

Donc

$$\begin{aligned} v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{4}{9}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \\ &= \frac{4}{9} \times \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \boxed{1 - \frac{4}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

c) Comme $-1<\frac{2}{3}<1$ et $-1<-\frac{1}{3}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1}$

L'événement $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k$ se produit lorsqu'on a obtenu 2 "Face" à la suite au cours des n premiers lancers. Lorsque n tend vers $+\infty$, l'événement $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} D_k$ se réalise "presque sûrement", c'est-à-dire avec probabilité 1 puisqu'il finira "toujours" par avoir 2 "Face" à la suite si on lance la pièce suffisamment longtemps.

Rqe : Le vocabulaire "presque sûrement" peut sembler peu mathématique de prime abord, mais c'est le vocabulaire employé pour désigner ce qui se produit avec probabilité 1. Notez qu'on parle alors d'événement "quasi-certain" et non d'événement "certain" car en toute rigueur $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} D_k \neq \Omega$. L'univers Ω contient en effet des tirages où "Face" ne sort jamais 2 fois de suite (par exemple le cas où "Pile" sort au k^e lancer pour tout $k\in\mathbb{N}^*$), mais ces tirages arrivent avec probabilité 0 (on dit qu'ils sont quasi-impossibles). Ces subtilités amenant à distinguer événements impossibles et événements de probabilités nulles apparaissent car l'expérience faite ici a un nombre infini d'issues (si on lance une infinité de fois la pièce). L'étude des espaces probabilisés dans le cas où Ω n'est pas fini fait partie du programme de 2e année de BCPST.

Exercice 3

1) a) Pour $x \in [0,1]$ on a $f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$

Comme $n \geqslant 2$ on a $n-1 > 0$ donc

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^{n-1} \leqslant 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 \leqslant 0 \Rightarrow f_n'(x) \leqslant 0$

De plus $f_n'(x) < 0$ pour $x \in [0,1[$.

La fonction f_n' est strictement négative sur $[0,1]$ sauf en un nombre fini de points donc f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Ainsi $f_n : [0,1] \rightarrow f_n([0,1])$ est une bijection.

Par ailleurs, $f_n(0) = 0^n - 0 + 1 = 1$ et $f_n(1) = 1^n - n + 1 = 2 - n$

Comme f_n est continue et décroissante sur $[0,1]$ on a donc

$f_n([0,1]) = [2-n, 1]$.

Finalement, $f_n : [0,1] \rightarrow [2-n, 1]$ est une bijection.

Dès lors, puisque $0 \in [2-n, 1]$ (car $n \geqslant 2$), l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0,1]$: c'est $u_n = f_n^{-1}(0)$.

b) On a : $(E_2) \Leftrightarrow f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ainsi $\boxed{u_2 = 1}$.

2) a) Par définition de u_n on a $f_n(u_n) = 0$ donc $u_n^n - nu_n + 1 = 0$

donc $nu_n - 1 = u_n^n$. Or $u_n \in [0,1]$ donc $u_n^n \in [0,1]$

Donc $\boxed{0 \leqslant nu_n - 1 \leqslant 1}$

b) La question précédente implique que $1 \leqslant nu_n \leqslant 2$ donc $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$, le théorème d'encadrement

fournit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

c) On a $\underline{u_n^n = \exp(n\ln(u_n))}$

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc $n\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Or $e^y \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0}$

d) Comme vu à la question 2)a) on a $u_n^n = nu_n - 1$.

La question 2)c) donne donc que $nu_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc $nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$.

3) a) Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$: t \mapsto t - \ln(1+t)$

On a : $\forall t \geq 0,\ g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0$

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc : $\forall t \geq 0,\ g(t) \geq g(0)$.

Or $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$, ainsi : $\forall t \geq 0,\ g(t) \geq 0$

soit $\boxed{\forall t \geq 0,\ t \geq \ln(1+t)}$

b) Comme vu à la question 2)b) on a $u_n \geq \frac{1}{n}$. En prenant $t = \frac{1}{n}$ à la question 3)a) on a $\frac{1}{n} \geq \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$

Donc $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n)$.

c) Dès lors $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} u_k \geq \sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$

Et par $\underline{\text{télescopage}}$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(2)$

Ainsi : $\forall n \geq 2,\ S_n \geq \ln(n+1) - \ln(2)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) - \ln(2) = +\infty$, le <u>théorème de comparaison</u> fournit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$