Programme de colles : semaine 24, du 7/4 au 11/4

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Continuité

Reprise du programme précédent.

2 (Sous-)espaces vectoriels

***Attention :* Les points suivants n'ont pas encore été abordés en classe : dimension, rang, lien avec la géométrie. Par ailleurs, la partie "base d'un s.e.v" ci-dessous n'ayant pas été abordée en TD, elle ne sera pas au coeur des exercices demandés, mais on pourra vérifier que les élèves connaissent les définitions.**

On travaille avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La définition d'un espace vectoriel (e.v.) n'est pas au programme de première année. Pour les exercices, on travaille essentiellement dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ ou de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; et, dans une moindre mesure, de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{R}^I$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- sous-espaces vectoriels (s.e.v.) :
  - notion de combinaison linéaire
  - F est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E lorsque :
    1) $0_E \in F$,
    2) $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$, et
    3) $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u \in F$.
  - F est un s.e.v de E ssi F est non vide et toute combinaison linéaire d'éléments de F appartient à F
  - savoir montrer qu'un ensemble donné est ou n'est pas un s.e.v.
  - une intersection finie de s.e.v. est un s.e.v.
- familles génératrices, s.e.v engendré :
  - on note $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_n$
  - $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un s.e.v
  - $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de F lorsque $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
  - savoir déterminer une famille génératrice d'un s.e.v décrit par paramètres ou par des équations cartésiennes
  - une famille $(u_1, \dots, u_n)$ génère un e.v. F ssi tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$
- familles libres :
  - $(u_1, \dots, u_n)$ est libre lorsque pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
  - savoir montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou liée
  - une famille de vecteurs est liée ssi un de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres
  - dans le cas d'une famille de 2 vecteurs : (u_1, u_2) est liée ssi u_1 et u_2 sont colinéaires
  - si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$: $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = \mu_k$
- bases d'un s.e.v :
  - une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base d'un s.e.v. F d'un e.v. E lorsque c'est une famille génératrice de F et qu'elle est libre
  - une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de F ssi tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$
  - coordonnées d'un vecteur dans une base

3 Informatique en langage Python

- chaînes de caractères :
  - parcours d'une chaîne par ses éléments, par ses indices
  - sous-chaînes `C[p:q]` , `C[p:]`, `C[:q]`, `C[p:q:r]`
  - non mutabilité
  - création d'une chaîne depuis la chaîne vide `c=""` puis concaténations successives `c=c+car`
- Simulation d'expériences aléatoires avec la bibliothèque `random`.
  - fonctions : `rd.random()`,`rd.uniform(a,b)`,`rd.randint(a,b)`,`rd.choice(L)`,`rd.sample(L,k)`
  - méthode pour simuler un évènement de probabilité p quelconque *(à partir d'une v.a. uniforme)*
  - estimation d'une probabilité par une approche fréquentielle

4 Questions de cours

Cette semaine, les colles suivront le schéma suivant :

A) un calcul de limite, voir Feuille de remédiation 12, exo 2 :
`https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=5892`

B) une question de cours issue de la liste ci-dessous

C) exercices au choix du colleur

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et l'expliquer sur un dessin.
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.
3. Montrer qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ décrit par une équation cartésienne ou par paramètres est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. *L'examinateur choisira l'ensemble F et la valeur de $n \in \{2,3,4\}$.*
4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $u_1, \dots, u_n \in E$. Donner la définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
6. Donner la définition d'une famille libre.
7. Montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ on a : $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n \implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i$.
8. Écrire une fonction `compte` prenant en argument une chaîne de caractères `texte` et un caractère `lettre` et renvoyant le nombre de fois que `lettre` apparaît dans `texte`.
9. Écrire une fonction Python `alea` ne prenant rien en argument et renvoyant `"a"` avec probabilité $0,2$, `"b"` avec probabilité $0,35$, et `"c"` avec probabilité $0,45$.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.