

NOM :

PRENOM :

Question 1. (/2 pts) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient $u, v, w \in E$. Donner la définition de $\text{Vect}(u, v, w)$.

$$\text{On a } \text{Vect}(u, v, w) = \{ \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}$$

Question 2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y - z = 0\}$.

1. (/3 pts) En revenant à la définition, démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. (/2 pts) Déterminer une famille génératrice de F .

- 1) • Comme $2 \times 0 - 3 \times 0 - 0 = 0$ on a $(0, 0, 0) \in F$
 • Soient $u = (x, y, z) \in F$ et $v = (x', y', z') \in F$. On a $u + v = (x + x', y + y', z + z')$.
 On calcule : $2(x + x') - 3(y + y') - (z + z') = 2x - 3y - z + 2x' - 3y' - z'$
 $= 0 + 0$ car $u, v \in F$
 $= 0$. Donc $u + v \in F$
 • Soient $u = (x, y, z) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
 On calcule $2\lambda x - 3\lambda y - \lambda z = \lambda(2x - 3y - z) = \lambda \times 0$ car $u \in F$
 $= 0$. Donc $\lambda u \in F$

Ainsi F est un sev de $\mathbb{R}^3$

- 2) Comme $2x - 3y - z = 0 \Leftrightarrow z = 2x - 3y$, on a $F = \{(x, y, 2x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\}$
 $= \{x(1, 0, 2) + y(0, 1, -3), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, -3))$. Ainsi $((1, 0, 2), (0, 1, -3))$
 est une famille génératrice de F

Question 3. (/3 pts) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que la famille (A, B) est libre.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\bullet \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 0 \\ -\lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ car } 0 \neq 1 \text{ (coefficient d'indice (1,3))}$$

donc $\lambda A \neq B$

$$\bullet \lambda B = \begin{pmatrix} -2\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } 0 \neq -1 \text{ (coefficient d'indice (2,1))}$$

donc $\lambda B \neq A$.

Ainsi A et B ne sont pas colinéaires donc la famille (A, B) est libre

NOM :

PRENOM :

Question 1. (/2 pts) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient $u, v, w \in E$. Donner la définition de $\text{Vect}(u, v, w)$.

$$\text{On a } \text{Vect}(u, v, w) = \{ \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}$$

Question 2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + z = 0\}$.

1. (/3 pts) En revenant à la définition, démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. (/2 pts) Déterminer une famille génératrice de F .

1) • Comme $3 \times 0 - 2 \times 0 + 0 = 0$
on a $(0, 0, 0) \in F$
• Soient $u = (x, y, z) \in F$ et
 $v = (x', y', z') \in F$.
On a $u + v = (x + x', y + y', z + z')$.
On calcule que :
 $3(x + x') - 2(y + y') + (z + z')$
 $= 3x - 2y + z + 3x' - 2y' + z'$
 $= 0 + 0$ car $u, v \in F$
 $= 0$. Donc $u + v \in F$

• Soient $u = (x, y, z) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
on a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
On calcule que
 $3\lambda x - 2\lambda y + \lambda z = \lambda(3x - 2y + z)$
 $= \lambda \times 0$ car $u \in F$
 $= 0$. Donc $\lambda u \in F$.
Ainsi F est un sev de $\mathbb{R}^3$.

2) Comme $3x - 2y + z = 0 \Leftrightarrow z = -3x + 2y$
on a :
 $F = \{(x, y, -3x + 2y), x, y \in \mathbb{R}\}$
 $= \{x(1, 0, -3) + y(0, 1, 2), x, y \in \mathbb{R}\}$
 $= \text{Vect}((1, 0, -3), (0, 1, 2))$. Donc
 $((1, 0, -3), (0, 1, 2))$

Question 3. (/3 pts) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que la famille (A, B) est libre.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } 0 \neq -1 \text{ (coefficient d'indice } (3, 1))$$

Donc $\lambda A \neq B$.

$$\text{Et } \lambda B = \begin{pmatrix} -2\lambda & 3\lambda \\ 0 & \lambda \\ -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } 0 \neq 1 \text{ (coefficient d'indice } (2, 1))$$

Donc $\lambda B \neq A$.

Ainsi A et B ne sont pas colinéaires donc la famille (A, B) est libre.

et une famille
génératrice de F