Feuille de cours 17 : rang d'une famille de vecteurs

Définition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E. On appelle rang de $u_1, u_2, \dots, u_n$ et note $\text{rg}(u_1, \dots, u_n)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$. En d'autres termes :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n))$$

Attention !
Bien sûr, s'il y a cette définition c'est que, de manière générale, le rang d'une famille de vecteurs ce n'est pas le nombre de vecteurs qu'elle contient :
en général $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) \neq n$, c'est-à-dire que $\dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) \neq n$.
En fait on a la propriété suivante :

Proposition 2
Pour $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs, $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$ si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Démonstration : par définition, $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Supposons maintenant que $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$ c'est-à-dire que $\dim(F) = n$. Alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de F qui est de cardinal $\dim(F)$, c'est donc une base de F. Donc $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Réciproquement, si on suppose que $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de F. Donc $\dim(F) = n$ c'est-à-dire que $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$.

$\square$

Pour trouver le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ on peut donc chercher une base de $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Comme $(u_1, \dots, u_n)$ est déjà une famille génératrice de F, on sait qu'en retirant successivement les vecteurs de cette famille qui sont combinaisons linéaires des autres, on obtiendra une famille $(v_1, \dots, v_r)$ qui sera une base de F. On aura alors donc $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim(F) = r$.

Une autre méthode consiste à utiliser le résultat suivant, faisant le lien entre rang d'une famille de vecteurs et rang d'une certaine matrice.

Définition 3
Soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On appelle matrice de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_p)$ la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_j dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^4$, prenons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base cacnonique, c'est-à-dire que :

Considérons les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (1, 3, 3, 5)$ et $u_3 = (1, 6, 7, 8)$. Alors la matrice de la famille (u_1, u_2, u_3) dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Attention, si on utilisait une autre base que la base canonique alors on obtiendrait une autre matrice. Par exemple, si on considère la base (f_1, f_2, f_3, f_4) donnée par

$$f_1 = (0, 1, 0, 0),\ \ f_2 = (0, 0, 0, -1),\ \ f_3 = (2, 0, 0, 0),\ \ f_4 = (0, 0, 1, 0)$$

alors, pour déterminer la matrice de la famille (u_1, u_2, u_3) dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) il faut déterminer les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans cette base. Or

donc la matrice de (u_1, u_2, u_3) dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) est

Proposition 4
Si A est la matrice d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ dans une base alors :

$$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{rg}(A).$$

Remarque 5

- Ce théorème affirme qu'on peut calculer le rang d'une famille de vecteurs en calculant le rang de la matrice de cette famille dans *n'importe quelle base*, le plus simple est de choisir la base
- Pour rappel, le rang d'une matrice c'est
- dans un espace de dimension p, le rang d'une famille de n vecteurs est inférieur à n et à p.

Exemple : Pour les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (1, 3, 3, 5)$ et $u_3 = (1, 6, 7, 8)$, on a, en utilisant la matrice de (u_1, u_2, u_3) dans la base canonique :

$\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) =$

Exemple : Déterminer $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ où $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 1, 2)$ et $u_4 = (2, 5, 8)$