

TD 17: exo 3

1) $S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
 $= \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc (M_1, M_2, M_3) est une famille génératrice de $S_2(\mathbb{R})$.

Puis, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ on a:

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0_{M_2(\mathbb{R})} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc (M_1, M_2, M_3) est libre. Ainsi c'est également une base de $S_2(\mathbb{R})$.

Comme cette base compte 3 vecteurs, on a donc $\dim(S_2(\mathbb{R})) = 3$.

2) Déterminons une base de $S_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$. On a: $\forall i, j \in [1, n], (A^T)_{ij} = A_{ij}$ i.e. $a_{ji} = a_{ij}$

$$\text{donc } A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_{ij} E_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij} + a_{ji} E_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji})$$

donc $A \in \text{Vect}((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, (E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$.

Ainsi $((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, (E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une famille génératrice de $S_n(\mathbb{R})$. C'est aussi une famille libre car $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ l'est ainsi

on peut écrire, pour $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{nn}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}, \lambda_{23}, \dots, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{n-1,n} \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) = 0_n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ji} = 0_n$$

$$\Rightarrow \forall i \in [1, n], \forall 1 \leq i < j \leq n, \lambda_{ij} = 0.$$

Finalement $((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, (E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$. Comme cette famille compte

$$\begin{aligned} & n + \text{Card}(\{(i, j) \in [1, n]^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\}) \\ &= n + \frac{n^2 - n}{2} \quad (n^2 - n \text{ est le nombre de "cases" hors diagonale} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \quad \text{d'une grille carrée de } n \text{ cases de côté}) \end{aligned}$$

éléments, on a $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2 + n}{2}$.

3) La famille $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ car :

• pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ on a : $\forall i, j \in [1, n] \ a_{ij} = -a_{ji}$
dmc en particulier $\forall i \in [1, n] \ a_{ii} = 0$, et dmc :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} E_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ji} E_{ji} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} -a_{ij} E_{ji} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}) \end{aligned}$$

dmc $A \in \text{Vect}((E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$ ainsi cette famille est génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

• pour $(\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ des réels on a :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} (E_{ij} - E_{ji}) = O_n \Rightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij} + (-\lambda_{ij}) E_{ji} = 0_n$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i < j \leq n \ \lambda_{ij} = 0 \quad (\text{et } -\lambda_{ij} = 0)$$

Donc cette famille est libre.

Finalement,

$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \text{Card}(\{E_{ij} - E_{ji}, 1 \leq i < j \leq n\}) = \frac{n^2 - n}{2}$$