
CONCOURS BLANC
Mathématiques - mercredi 29 avril 2025
CORRIGÉ

Exercice 1. Dynamique des populations

1. On sait d'après le cours que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n.}$
   Ainsi une condition nécessaire et suffisante d'extinction de la population est $v_0 = 0$ ou $0 < q < 1$ (étant donné que $q > 0$ d'après l'énoncé).

2. (a) Définissons la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right)$$

de sorte qu'on a bien, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n).}$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et le calcul montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{S}.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		S		$\frac{3S}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	S	$\nearrow$	$\frac{9S}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

(b) On peut tracer les 20 premiers termes de la suite avec le code suivant :

```python
S = 30
v0 = 5
L=[v0]
v=v0
for k in range(19):
    v = v + v * (S - v) / (2 * S)
    L.append(v)
absi = [k for k in range(20)]
plt.plot(absi,L)
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("v_n")
plt.show()
```

(c) On importe le module à l'aide de la commande `import matplotlib.pyplot as plt`.

(d) On conjecture à l'aide du graphique que la suite (v_n) converge vers 30, et précisément que $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } S}$ (ce n'est qu'une conjecture à ce stade !).

(e) L'étude de la fonction f montre que l'intervalle $]0,S]$ est stable par la fonction f, autrement dit : pour tout $x\in]0,S]$, $f(x)\in]0,S]$.

Comme $v_0\in]0,S]$, on montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\in]0,S]$:

- Par hypothèse, $v_0\in]0,S]$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $v_n\in]0,S]$. Alors, comme $]0,S]$ est stable par f, on déduit que $v_{n+1}=f(v_n)\in]0,S]$.

Ceci achève la récurrence, et on a bien montré que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\in]0,S]$, ce qui prouve au passage que $\boxed{(v_n)\text{ est majorée}}$ (par S par exemple).

Étudions la monotonie de la suite (v_n). Il y a plusieurs façons de procéder, mais étant donné ce qui précède, suivons la ligne suivante.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}v_n\left(\frac{S-v_n}{S}\right)\geq 0$$

car $v_n\in]0,S]$. Ainsi $\boxed{\text{la suite }(v_n)\text{ est croissante.}}$ Comme elle est de plus majorée, d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(v_n)\text{ converge.}}$

Notons l sa limite. Par conservation des inégalités lors du passage à la limite, du fait que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n\in]0,S]$$

on déduit que $l\in[0,S]$. La fonction f est continue sur $[0,S]$ donc continue au point l. En particulier, en passant à la limite lorsque $n\to+\infty$ dans la relation

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}=f(v_n)$$

on conclut que $l=f(l)$, c'est-à-dire que l est un point fixe de f. En résolvant cette équation, on conclut que $l=0$ ou $l=S$.

Or $v_0>0$ et (v_n) est croissante, donc $l\geq v_0>0$. Ceci implique que $l=S$.

On a démontré que $\boxed{(v_n)\text{ converge vers }S.}$

3. (a) En définissant la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x)=x+\frac{1}{2}x\left(\frac{x-A}{S}\right)\left(\frac{S-x}{S}\right),$$

on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=f(v_n)$.

Ainsi pour tout $x\in[0,S]$, $f(x)-x=\frac{1}{2}x\left(\frac{x-A}{S}\right)\left(\frac{S-x}{S}\right)$. C'est un polynôme de degré 3 donné sous forme factorisée : son signe est donné par la règle des signes. On obtient le tableau de signes suivant sur $[0,S]$:

x	0		A		S
$f(x)-x$	0	$-$	0	$+$	0

L'énoncé indique que f est une bijection strictement croissante de $[0,S]$ sur lui même. On en déduit, avec le tableau de signe ci-dessus, la courbe représentative donnée figure 1.

(b) Supposons que $v_0\in]0,A[$.

La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0,S]$ donc sur $[0,A]$. De plus, $f(0)=0$ et $f(A)=A$ donc d'après le théorème de la bijection continue, $f(]0,A[)=]0,A[$. L'intervalle $]0,A[$ est stable par la fonction f et comme $v_0\in]0,A[$, une démonstration similaire à celle de la question 2. prouve que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\in]0,A[$.

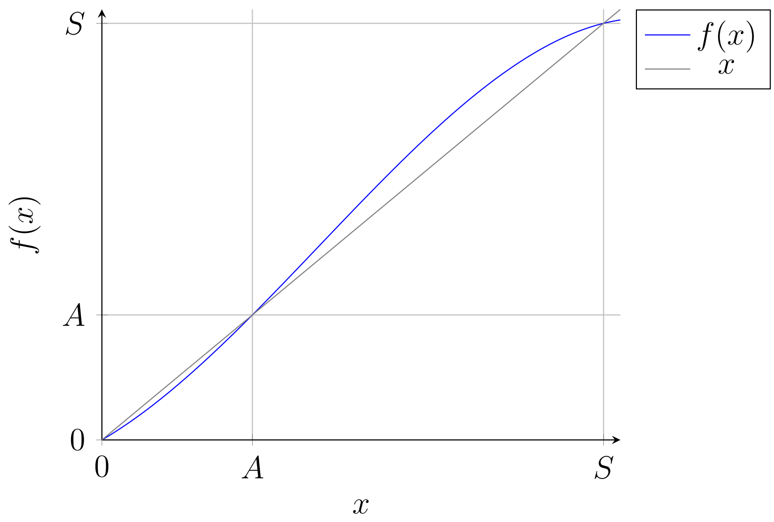


Figure 1: Courbe représentative de la fonction f sur $[0, S]$. 0, A et S sont des points fixes de f.

Or pour tout $x \in]0, A[$, $f(x) - x \leq 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n \leq 0$, autrement dit que $v_{n+1} \leq v_n$.

Ceci prouve que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$

De plus (v_n) est minorée (par 0 par exemple), donc d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge.}}$

Notons l sa limite, $l \in [0, A]$ par conservation des inégalités lors du passage à la limite.

Par un argument similaire à celui de la question précédente (en particulier f est continue au point l), on conclut que l est un point fixe de f, donc $l = 0$, ou $l = A$ ou $l = S$.

Comme $v_0 \in]0, A[$ et comme (v_n) est décroissante, on conclut que $l = 0$.

Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } 0.}$

(c) Supposons maintenant que $v_0 \in]\, A, S\, [$. L'étude est en tout point similaire à la précédente :

- L'intervalle $]A, S[$ est stable par la fonction f, donc une preuve par récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]A, S[$.
- La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est positive sur $]A, S[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n \geq 0$$

  ce qui prouve que (v_n) est croissante.
- (v_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) converge vers un nombre réel $l \in [A, S]$.
- f est continue sur $[A, S]$ donc l est un point fixe de f, et par croissance de la suite (v_n), on conclut que $l = S$.

En conclusion $\boxed{\text{si } v_0 \in]A, S[, \text{ alors } (v_n) \text{ converge vers } S.}$

Si $v_0 = A$, alors une récurrence immédiate prouve (étant donné que A est un point fixe de f) que (v_n) est la suite constante égale à A.

(d) S représente l'effectif maximal pour la population (v_n).

A représente l'effectif initial au delà duquel la population survit. Si l'effectif initial est inférieur à A, la population s'éteint.

Exercice 2. Modélisation d'une rencontre aléatoire

1. Après le n-ième déplacement, notons x_n le nombre de routes séparant P_1 et P_2 en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. Comme il y a 5 routes en tout, on a $x_n \in [\![0, 4]\!]$. On remarque alors que :

   - A_n correspond au cas où $x_n = 0$,
   - B_n correspond au cas où $x_n \in \{1, 4\}$ (car si 4 routes séparent P_1 de P_2 en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, alors seulement 1 les sépare en tournant dans l'autre sens),
   - et de même C_n correspond au cas où $x_n \in \{2, 3\}$.

   Dès lors, comme ces trois cas couvrent toutes les valeurs possibles pour x_n on a $A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega$. Et comme ces trois cas correspondent à des valeurs distinctes de x_n, les évènements A_n, B_n et C_n sont deux à deux disjoints.
   $\boxed{\text{Ainsi, } (A_n, B_n, C_n) \text{ est bien un système complet d'évènements.}}$

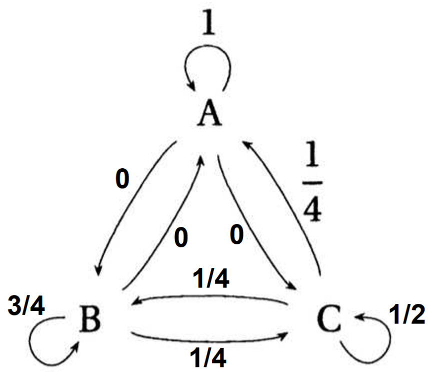
2. D'après l'énoncé, les deux personnes sont initialement à 1 couloir de distance (sites S_1 et S_2) donc $\boxed{a_0 = 0,\ b_0 = 1 \text{ et } c_0 = 0.}$

3. (a) Supposons que l'évènement C_n soit réalisé, c'est-à-dire que P_1 et P_2 soient à deux couloirs de distance après le n-ème déplacement. Appelons C_1 et C_2 ces deux couloirs. Comme il y a 5 sites en tout, la seule possibilité pour que P_1 et P_2 se rencontrent au déplacement $n + 1$, c'est que P_1 emprunte le couloir C_1 et P_2 le couloir C_2.
   D'après l'énoncé, les probabilités que P_1, respectivement P_2, emprunte le couloir C_1, respectivement C_2, valent toutes les deux 1/2. De plus, les déplacements de P_1 et P_2 sont indépendants. Donc $\boxed{\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.}$

   Par ailleurs, si les deux personnes se rencontrent après n déplacements, alors elles ne bougent plus, donc elles sont encore dans la même pièce à l'étape $n+1$. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1.}$

   Enfin, si l'évènement B_n est réalisé, c'est-à-dire si P_1 et P_2 sont sur des sites adjacents après n déplacements, alors il est impossible qu'ils se rencontrent après le déplacement suivant. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0.}$

   (b) On obtient le schéma suivant :



4. Dans le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n), la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n)$$

   En utilisant la question 3.(a), on a donc $a_{n+1} = 1 \times a_n + 0 \times b_n + \frac{1}{4} \times c_n$ soit $\boxed{a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n.}$

On écrit de même :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n)$$
$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n)$$

ce qui donne, en utilisant les probabilités conditionnelles indiquées sur le schéma de la question 3.(b) : $\boxed{b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n.}$

5. (a) On écrit tout d'abord que :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n \end{aligned}$$

Ensuite, la relation $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ conduit à $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$.
On obtient donc

$$b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}\left(4b_{n+1} - 3b_n\right)$$

soit après simplification : $\boxed{b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n.}$

(b) La suite (b_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son polynôme caractéristique, $P = X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{5}{16}$, a pour discriminant $\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{5}{16} = \frac{5}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$, et donc pour racines

$$\alpha = \frac{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

D'après le cours, on sait donc qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n.$$

On utilise alors que, d'après la question 2, $b_0 = 1$, et d'après la question 4, $b_1 = \frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 = \frac{3}{4}$. On résout donc le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\alpha^0 + \mu\beta^0 = b_0 \\ \lambda\alpha^1 + \mu\beta^1 = b_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ \frac{5}{8}(\lambda+\mu) + \frac{\sqrt{5}}{8}(\mu - \lambda) = \frac{3}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mu = 1 - \lambda \\ \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}(1 - 2\lambda) = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \mu = 1 - \lambda \\ 5 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5}\lambda = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mu = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.$$

Finalement, on obtient $\boxed{b_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\alpha^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\beta^n.}$

(c) Comme mentionné à la question 5.(a), on a $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$. En utilisant l'expression de b_n ci-dessus on a donc :

$$\begin{aligned} c_n &= 4\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\alpha^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\beta^{n+1}\right) - 3\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\alpha^{n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\beta^{n}\right) \\ &= \frac{1}{10} \times \left(\left(4(5-\sqrt{5})\alpha - 15 + 3\sqrt{5}\right)\,\alpha^n + \left(4(5+\sqrt{5})\beta - 15 - 3\sqrt{5}\right)\,\beta^n \right) \end{aligned}$$

On calcule alors que

$$\begin{aligned} 4(5-\sqrt{5})\alpha &= \frac{(5-\sqrt{5})^2}{2} = \frac{30-10\sqrt{5}}{2} = 15 - 5\sqrt{5} \\ \text{et}\quad 4(5+\sqrt{5})\beta &= \frac{(5+\sqrt{5})^2}{2} = \frac{30+10\sqrt{5}}{2} = 15 + 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{10} \times \left((15 - 5\sqrt{5} - 15 + 3\sqrt{5})\alpha^n + (15 + 5\sqrt{5} - 15 - 3\sqrt{5})\beta^n\right) \\ &= \frac{-2\sqrt{5}\alpha^n + 2\sqrt{5}\beta^n}{10} \end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n).}$

6. Commençons par remarquer que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$ (en effet, pour α on a $0 < 5 - \sqrt{5} < 5 < 8$, et pour β on a $0 < 5 + \sqrt{5} < 8$ car $\sqrt{5} < 3$ car $5 < 9$). Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta^n = 0$, et, d'après les expressions trouvées aux questions 5.(b) et 5.(c), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

   Par ailleurs, comme A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements, on a $a_n + b_n + c_n = 1$, donc $a_n = 1 - b_n - c_n$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1.}$

7. (a) Par définition on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset R$. La propriété de croissance des probabilités donne donc $\boxed{a_n \leq \mathbb{P}(R) \leq 1.}$

   (b) L'évènement "les deux personnes ne se retrouvent jamais" est égal à $\overline{R}$, sa probabilité est donc $\mathbb{P}(\overline{R}) = 1 - \mathbb{P}(R)$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, donc l'inégalité de la question précédente fournit, d'après le théorème d'encadrement, que $\mathbb{P}(R) = 1$.
   Ainsi $\mathbb{P}(\overline{R}) = 0$: $\boxed{\text{la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais est nulle.}}$[1]

8. (a) On peut par exemple écrire :

```python
def pas():
    t = rd.random()
    if t < 0.5 :
        return 1
    else :
        return -1
```

[1]Notez toutefois que cela ne signifie pas qu'il soit *impossible* que les deux personnes ne se rencontrent pas. En fait l'évènement R vaut $R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, une écriture mettant en évidence le caractère infini de l'univers permettant de décrire cette expérience aléatoire. Dans le cadre d'un univers infini, il est possible d'avoir des évènements de probabilité nulle mais différents de $\emptyset$, on parle d'évènement *négligeable*.

(b) Ici, il faut faire attention à ne pas renvoyer les positions `0` ou `6` (qui doivent être remplacées par `5` et `1`) :

```python
def avance(p):
    p_bis = p + pas()
    if p_bis == 0:
        p_bis = 5
    if p_bis == 6:
        p_bis = 1
    return p_bis
```

(c) On attendait le code suivant :

```python
    while p1 != p2 :
        n += 1
        p1, p2 = avance(p1), avance(p2)
```

(d) D'après la question 7.(b), la probabilité que les deux personnes se rencontrent au bout d'un moment vaut 1. C'est donc avec probabilité 1 qu'on aura au bout d'un moment `p1` $=$ `p2` dans le code, et donc que la boucle `while` terminera.

(e) Après exécution du code suivant, la variable `p` contient une approximation de la probabilité demandée.

```python
N = 10000
X = 0
for k in range(N):
    if trajectoire()<=10 :
        X += 1
p = X/N
```

Exercice 3. Étude d'un ensemble de matrices

1. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a :

$$M \in E \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R} \;:\; M = M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons alors : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On a donc : $M \in E \iff M \in \mathrm{Vect}(A, B)$, donc $E = \mathrm{Vect}(A, B)$.
Donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$
Et (A, B) est une famille génératrice de E. De plus, c'est une famille libre, en effet : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \neq B$ et $A \neq 0_2$ donc A et B sont non colinéaires donc (A, B) est une base de E et $\boxed{\dim E = 2}$

2. (a) Remarquons déjà que $U \in E$ et $V \in E$.

De plus, U et V ne sont pas colinéaires car $U \neq 0_2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda U = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} \neq V$ donc $\mathcal{B}$ est une famille libre de E.

De plus $\dim E = 2$ et $\mathcal{B}$ compte 2 vecteurs donc $\boxed{\mathcal{B} = (U, V) \text{ est une base de } E.}$

(b) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on cherche λ et μ tels que : $M_{a,b} = \lambda U + \mu V$, soit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lllll} \frac{1}{2}\lambda & + & \frac{1}{2}\mu & = a \\ \frac{1}{2}\lambda & - & \frac{1}{2}\mu & = b \\ \frac{1}{2}\lambda & - & \frac{1}{2}\mu & = b \\ \frac{1}{2}\lambda & + & \frac{1}{2}\mu & = a \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lllll} \frac{1}{2}\lambda & + & \frac{1}{2}\mu & = a \\ \frac{1}{2}\lambda & - & \frac{1}{2}\mu & = b \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lllll} \frac{1}{2}\lambda & + & \frac{1}{2}\mu & = a & \\ \lambda & & & = a+b & \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \mu = 2\left(a - \frac{1}{2}\lambda\right) = a - b \\ \lambda = a + b \end{array} \right.$$

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées de } M_{a,b} \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ sont : } (a+b, a-b)}$

3. • On remarque que $U^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = U$. On conjecture donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U^n = U$.

Démontrons cette conjecture par récurrence :

Pour $n = 1$, on a bien $U^1 = U$. Supposons ensuite que $U^n = U$ pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, alors $U^{n+1} = U^n \times U = U \times U = U$ d'après le calcul préliminaire.

Finalement, on a bien démontré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U^n = U.}$

• De la même manière on a $V^2 = V$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V^n = V.}$

4. On calcule que $UV = 0_2$. De même pour le produit VU.
Conclusion : $\boxed{UV = 0_2 = VU}$

5. D'après la question 2.(b), pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M_{a,b} = (a+b)\,U + (a-b)\,V$.
D'après 4, les matrices U et V commutent donc on peut utiliser le binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} M_{a,b}^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+b)^k\, U^k\, (a-b)^{n-k}\, V^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} (a+b)^0\, U^0\, (a-b)^n\, V^n + 0_2 + \binom{n}{n} (a+b)^n\, U^n\, (a-b)^{n-n}\, V^{n-n} \text{ (produits nuls)} \\ &= (a-b)^n\, V^n + (a+b)^n\, U^n \\ &= (a-b)^n\, V + (a+b)^n\, U \quad \text{(d'après 3.)} \\ &= (a+b)^n\, U + (a-b)^n\, V \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{les coordonnées de } M_{a,b}^n \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ sont : } ((a+b)^n, (a-b)^n)}$