CONCOURS BLANC
Mathématiques - mercredi 29 avril 2025
Durée : 3 h

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidate ou candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il convient d'alerter au plus tôt l'équipe de surveillance qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Si, au cours de l'épreuve, une candidate ou un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle ou il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives prises.

Ce sujet comporte 3 exercices indépendants.

On pourra admettre le résultat d'une question ou d'une sous-question pour passer aux questions suivantes, à condition de le mentionner explicitement.

Une annexe dans laquelle certaines commandes Python sont rappelées est jointe à la fin du sujet. **Pour les questions d'informatique, on considérera que les importations de modules nécessaires ont été préalablement faites.**

Exercice 1. Dynamique des populations

Dans ce problème, on propose d'étudier différents modèles d'évolution d'une population, et d'étudier les conditions de son extinction. Les questions sont largement indépendantes ; les sous-questions sont liées.
On s'intéresse à des modèles déterministes discrets d'évolution d'une population. Dans chacun des modèles, une suite (v_n) modélise le nombre d'individus dans la population à la génération n. On dit qu'il y a extinction si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

1. Pour commencer, on propose le modèle suivant : le nombre initial d'individus est noté $v_0 \in \mathbb{R}^+$ et à chaque génération, chaque individu a un nombre moyen de descendants $q > 0$, de telle sorte que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = q\, v_n.$$
Résoudre le modèle et donner une condition d'extinction.

2. On propose un nouveau modèle. On définit une suite (v_n) par :
$$v_0 \in \mathbb{R}^+ \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} v_n \left(\frac{S - v_n}{S}\right)$$
où $S \in]0, +\infty[$ est une constante du problème.

(a) Déterminer une fonction f sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f\left(v_n\right).$$

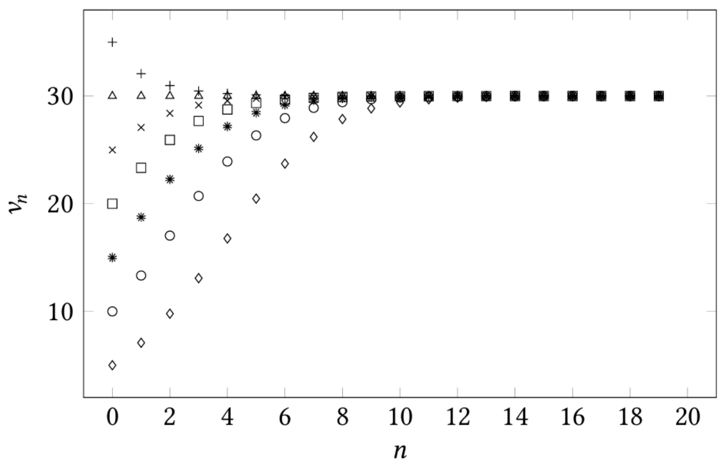
Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Recopier et compléter les lignes 5 à 7 du code suivant pour qu'il trace les 20 premiers termes de la suite.

```
1  S = 30
2  v0 = 5
3  L = [v0]
4  v = v0
5  for k in ## LIGNE À COMPLÉTER ##
6      ## LIGNE À COMPLÉTER ##
7      ## LIGNE À COMPLÉTER ##
8  absi = [k for k in range(20)]
9  plt.plot(absi,L)
10 plt.xlabel("n")
11 plt.ylabel("v_n")
12 plt.show()
```

(c) Pour le tracé, on a utilisé le module `matplotlib.pyplot` sous l'alias `plt`. Comment importer le module ?

(d) On trace sur la même figure l'évolution de v_n pour différentes valeurs de v_0. Cela donne les courbes suivantes (pour $S = 30$).



Conjecturer le comportement de la suite.

(e) On suppose maintenant que $v_0 \in]0, S]$. Démontrer que (v_n) est croissante et majorée par S. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

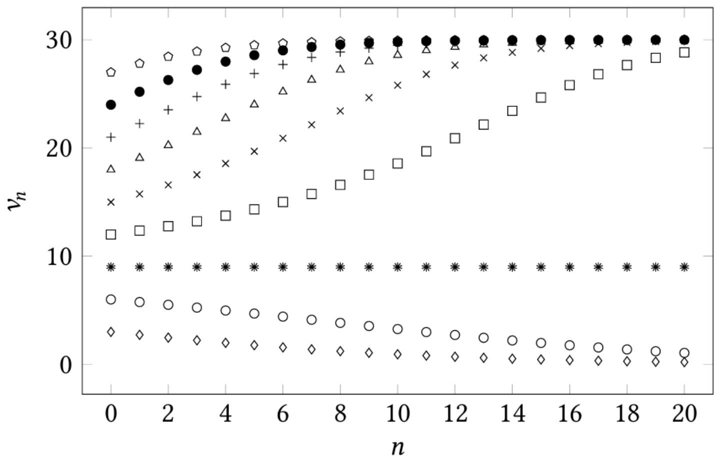
3. On souhaite affiner le modèle en modifiant la fonction f. Désormais,

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} v_n \left(\frac{S - v_n}{S}\right)\left(\frac{v_n - A}{S}\right)$$

où $A \in]0, S[$ est fixé.

(a) Identifier f. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0, S]$. En déduire l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, S]$. On fera attention à la position relative par rapport à la droite d'équation $y = x$ et on utilisera sans démonstration que f est une bijection strictement croissante de $[0, S]$ sur lui-même.

Un code analogue au précédent donne le tracé suivant pour les premiers termes de la suite (v_n) pour $S = 30$ et $A = 9$. On se restreint à $v_0 \in [0, S]$.

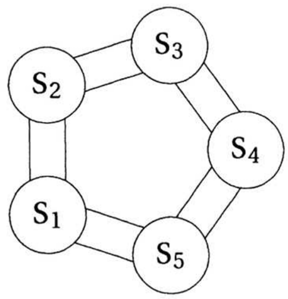


(b) Dans cette question $v_0 \in]0, A[$. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n \in]0, A[$, puis que (v_n) est décroissante. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

(c) Réaliser une étude analogue lorsque $v_0 \in]A, S[$. Que se passe-t-il si $v_0 = A$?

(d) Donner une interprétation (en terme de dynamique des populations) des quantités A et S.

Exercice 2. Modélisation d'une rencontre aléatoire



Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.

Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.
Pour tout entier naturel n, on définit les trois évènements A_n, B_n, C_n :

- A_n : "les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement";
- B_n : "les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement";
- C_n : "les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement".

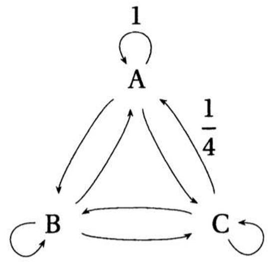
On note a_n, b_n, c_n les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements.

2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

3. (a) Justifier que
$$\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1.$$
Que vaut $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$?

   (b) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On présentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma ci-contre.



4. Établir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

5. (a) Exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n et c_n puis exprimer c_n en fonction de b_{n+1} et b_n pour obtenir enfin une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n. On fera intervenir les nombres
$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \text{ et } \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right).$$

6. À partir de la somme $a_n + b_n + c_n$, déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite (a_n).

7. On note R l'évènement "les deux personnes se rencontrent à un moment".

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n \leq \mathbb{P}(R) \leq 1.$$

   (b) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

8. On cherche à simuler la situation précédente en Python.

   (a) À l'aide du module `random`, écrire une fonction Python `pas` qui renvoie 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

   (b) On modélise la position d'un individu par un entier `p` compris entre 1 et 5. En utilisant la fonction `pas`, écrire une fonction Python `avance` qui prend en argument la position `p` d'un des deux individus à un instant donné et qui renvoie sa position à l'instant suivant.

   (c) Recopier et compléter les lignes 5 à 7 du code suivant pour que la fonction `trajectoire` renvoie l'instant `n` auquel les deux personnes se rencontrent.

```python
def trajectoire():
    n = 0
    p1 = 1
    p2 = 2
    while ## LIGNE À COMPLÉTER ##
        n += 1
        p1, p2 = ## LIGNE À COMPLÉTER ##
    return n
```

(d) Justifier que le code précédent termine avec probabilité 1.

(e) Proposer un programme Python permettant d'estimer la probabilité que les deux personnes se rencontrent en moins de 10 déplacements.

Exercice 3. Étude d'un ensemble de matrices

On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble de matrices défini par

$$E = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \ , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

2. Soient les matrices
$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{B} = (U, V)$ est une base de E.

   (b) Déterminer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, les coordonnées de $M_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$.

3. Déterminer les matrices U^n et V^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Calculer les produits UV et VU.

5. En utilisant les questions précédentes, déterminer, pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les coordonnées de $M_{a,b}^n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Annexe Python

- Dans le module `matplotlib.pyplot` importé sous l'alias `plt` :
  `plt.plot(X,Y)` prend en entrée deux vecteurs ou deux listes de même taille, et réalise le tracé des points d'abscisses prises dans `X` et d'ordonnées prises dans `Y`.
  On utilise `plt.show()` pour afficher le tracé.

- Dans le module `random` importé sous l'alias `rd` :
  `rd.random()` renvoie un nombre réel compris entre 0 et 1.
  `rd.choice(L)` renvoie un élément de la liste `L` choisi au hasard.

FIN DU SUJET
