Programme de colles : semaine 25, du 5/5 au 9/5

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 (Sous-)espaces vectoriels

On travaille avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La définition d'un espace vectoriel (e.v.) n'est pas au programme de première année. Pour les exercices, on travaille essentiellement dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ ou de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; et, dans une moindre mesure, de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{R}^I$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- reprise du programme précédent :
  - s.e.v
  - familles génératrices
  - familles libres
- bases d'un s.e.v :
  - une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base d'un s.e.v. F d'un e.v. E lorsque c'est une famille génératrice de F et qu'elle est libre
  - une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de F ssi tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$
  - coordonnées d'un vecteur dans une base
  - exemple des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
  - savoir montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un s.e.v. F et déterminer les coordonnées de tout vecteur de F dans cette base
  - savoir obtenir une base d'un s.e.v à partir d'une famille génératrice non libre, en appliquant le résultat suivant : si $v \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n, v) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$
- dimension d'un s.e.v :
  - toutes les bases d'un s.e.v E ont le même nombre d'éléments noté $\dim(E)$
  - si E est de dimension p alors : *(les résultats suivants sont tous admis)*
    - une famille libre de E compte au plus p éléments, et une famille libre à p éléments est une base
    - une famille génératrice de E compte au moins p éléments, et une famille génératrice à p éléments est une base
  - si $E \subset F$ alors $\dim(E) \leq \dim(F)$ avec égalité ssi $E = F$
- rang d'une famille de vecteurs :
  - pour $u_1, \ldots, u_n \in E$ on note $\text{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n))$
  - le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de ces vecteurs dans une base. *Nous n'avons pas introduit de notation pour cette matrice pour le moment.*
  - $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre ssi $\text{rg}(u_1, \ldots, u_n) = n$

2 Géométrie du plan et de l'espace

Les équations de droites et de plans et la projection orthogonale n'ont pas été abordées en classe. Les équations de cercles ont été vues uniquement à travers un exercice.

- notion de vecteur et de base :
  - repérage d'un point/d'un vecteur par ses coordonnées
  - combinaisons linéaires, relation de Chasles
  - colinéarité, coplanarité

- bases du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$. *On définit une base de $\mathbb{R}^2$ comme un couple de vecteurs non colinéaires, et une base de $\mathbb{R}^3$ comme un triplet de vecteurs non coplanaires. On remarque que cela coïncide avec la notion de base de s.e.v*
- savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base
- déterminant de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont on connaît les coordonnées dans la base canonique : si $u = (a_1, b_1)$ et $v = (a_2, b_2)$, on note $\det(u, v) = a_1b_2 - a_2b_1$
- u et v sont colinéaires ssi $\det(u, v) = 0$

- produit scalaire et orthogonalité :
  - définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ à partir des coordonnées dans la base canonique
  - bilinéarité, symétrie, caractère défini positif du produit scalaire
  - orthogonalité : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux lorsque $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$
  - norme, propriétés élémentaires. Identité $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\,.\,\vec{v}+||\vec{v}||^2$, théorème de Pythagore. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire n'ont pas encore été démontrées en classe mais feront l'objet d'un exercice du TD.*
  - une famille de vecteurs non nuls orthogonaux et de bon cardinal forme une base *(ce résultat a été admis)*, base orthonormée
  - les formules donnant le produit scalaire et le déterminant en fonction des coordonnées sont valables lorsque les coordonnées sont données dans une base orthonormée *(ce résultat a été admis)*

3 Informatique en langage Python

Pas d'informatique cette semaine.

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Montrer qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ décrit par une équation cartésienne ou par paramètres est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. *L'examinateur choisira l'ensemble F et la valeur de $n \in \{2, 3, 4\}$.*
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $u_1, \dots, u_n \in E$. Donner la définition de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
4. Donner la définition d'une famille libre.
5. Montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ on a : $\lambda_1u_1 + \cdots + \lambda_nu_n = \mu_1u_1 + \cdots + \mu_nu_n \implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i$.
6. Donner la définition d'une base et de la dimension d'un sous-espace vectoriel.
7. Donner la définition du déterminant de deux vecteurs u et v du plan exprimés dans la base canonique. Compléter ensuite la propriété suivante : $\det(u, v) \neq 0 \iff$ la famille (u, v) est ...
8. En utilisant les propriétés du produit scalaire, démontrer que pour tous vecteurs u, v on a : $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\,u\,.\,v + ||v||^2$.
9. Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore en utilisant la question de cours précédente.
10. Donner la définition d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'une famille de vecteurs choisie par l'examinateur est une telle base.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.