Exercice 1
Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y, -y) \end{array}$

2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,x,x,x) \end{array}$

Exercice 2
Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+1, y-z) \end{array}$

2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$

Exercice 3
Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 1+xy \end{array}$

2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x+3y, -z) \end{array}$

3. $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+b-2c+3d \end{array}$

4. $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice fixée.

5. $\varphi_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$

Exercice 4
Pour $a \in \mathbb{R}$ on note $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x \end{array}$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que les f_a sont les seuls éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exercice 5
Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer leurs noyaux. Sont-elles injectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y+z) \end{array}$

2. $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

Exercice 6
Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y, x+z) \end{array}$

2. $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{array}$

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x+y-z.$$

1. Montrer que f est une forme linéaire.
2. Déterminer le noyau de f. De quel objet géométrique s'agit-il ?
3. Quelle est la dimension de $Ker(f)$?

Exercice 8
On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} p & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & : & (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) \end{array}$$

1. Montrer que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $p \circ p = p$.
3. En déduire l'expression de p^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9
Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$
   (b) On suppose de plus que f et g commutent c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$.
   Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g)) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
   (b) On suppose de plus que f et g commutent c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$.
   Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 10
Soient E, F et G trois espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$g \circ f = 0 \iff Im(f) \subset Ker(g).$$

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application donnée par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = (x+2y-2z, -x+3y, -2y+z).$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 12
On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & : & (x,y,z) & \longmapsto & (-x+z, y-z, 2x+y-2z) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & : & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+z, 2x-y+z) \end{array}$$

1. Montrer que $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Que peut-on en déduire ?