Programme de colles : semaine 26a, du 12/5 au 16/5

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.
Ce programme sera modifié pour la semaine 26b du 19/5 au 23/5. Conformément au colloscope, sur ces 2 semaines, seules auront lieu les colles des lundi 12/5, mardi 13/5, jeudi 22/5 et vendredi 23/5.

1 Informatique en langage Python

Pas d'informatique cette semaine.

2 (Sous-)espaces vectoriels

reprise du programme précédent.

3 Géométrie du plan et de l'espace

Les équations de cercles et le projeté orthogonal ont été vus uniquement à travers des exercices.

- notion de vecteur et de base :
  - repérage d'un point/d'un vecteur par ses coordonnées
  - combinaisons linéaires, relation de Chasles
  - colinéarité, coplanarité
  - bases du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$, coordonnées d'un vecteur dans une base
  - déterminant de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$
  - u et v sont colinéaires ssi $\det(u, v) = 0$
- produit scalaire et orthogonalité :
  - définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ à partir des coordonnées dans la base canonique
  - bilinéarité, symétrie, caractère défini positif du produit scalaire
  - orthogonalité, norme, propriétés élémentaires. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, identité $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + ||\vec{v}||^2$, théorème de Pythagore. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire ont été démontrées en TD.*
  - une famille de vecteurs non nuls orthogonaux et de bon cardinal forme une base *(ce résultat a été admis)*, base orthonormée
  - les formules donnant le produit scalaire et le déterminant en fonction des coordonnées sont valables lorsque les coordonnées sont données dans une base orthonormée *(ce résultat a été admis)*
- droites et plans :
  - équation paramétrique d'une droite du plan ou de l'espace (resp. d'un plan de l'espace) à l'aide d'un vecteur directeur (resp. d'un couple de vecteurs directeurs)
  - équation cartésienne d'une droite du plan (ou d'un plan de l'espace) à l'aide d'un vecteur normal
  - savoir passer de l'équation cartésienne à l'équation paramétrique et inversement
  - système d'équations cartésienne d'une droite de l'espace. Exemples d'intersections de plans

4 Applications linéaires

Attention : la notion de matrice d'une application linéaire n'a pas encore été vue en classe. *On travaille le plus souvent avec $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, mais des exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X]$ ont aussi été présentés en classe.*

- définition de la linéarité, proposition : si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$
- savoir montrer qu'une application est ou n'est pas linéaire
- opérations sur les applications linéaires : somme, multiplication par un scalaire, composition, puissances (si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k fois) avec la convention $f^0 = Id_E$), bijection réciproque
- vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire
- noyau d'une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $Ker(f)$ est un s.e.v de E. f est injective ssi $Ker(f) = \{0_E\}$
- image d'une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $Im(f)$ est un s.e.v de F. f est surjective ssi $Im(f) = F$
- si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E et si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $Im(f) = Vect(f(u_1), \dots, f(u_n))$
- rang d'une application linéaire : $\text{rg}(f) = \dim(Im(f)) = \text{rg}(f(u_1), \dots, f(u_n))$ où $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de l'espace de départ de f
- théorème du rang (*ce résultat a été admis*). Application : si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et si $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$ alors :
  - f est surjective ssi $\text{rg}(f) = p$
  - f est injective ssi $\text{rg}(f) = n$
  - f est bijective ssi $\text{rg}(f) = n = p$

  En particulier, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est surjective ssi f est injective ssi f est bijective.

5 Questions de cours

Cette semaine, en plus d'une question de cours parmi celles ci-dessous, toutes les colles devront comporter la question suivante au sein, ou non, d'un exercice plus complet : Démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ choisie par l'examinateur (avec $n, p \in \{1,2,3,4\}$) est linéaire.

1. Donner la définition d'une base et de la dimension d'un sous-espace vectoriel.
2. Donner la définition du déterminant de deux vecteurs u et v du plan exprimés dans la base canonique. Compléter ensuite la propriété suivante : $\det(u,v) \neq 0 \iff$ la famille (u,v) est ...
3. En utilisant les propriétés du produit scalaire, démontrer que pour tous vecteurs u, v on a : $||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\,u\,.\,v + ||v||^2$.
4. Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore en utilisant la question de cours précédente.
5. Donner la définition d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'une famille de vecteurs choisie par l'examinateur est une telle base.
6. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne d'une droite du plan dont l'examinateur donne la représentation graphique.
7. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Laquelle des composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existe ? Préciser son ensemble de départ et d'arrivée, puis montrer que c'est une application linéaire.
8. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Donner la définition de $Ker(f)$ et démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
9. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Donner la définition de $Ker(f)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur $Ker(f)$ pour que f soit injective.
10. Donner la définition du rang d'une application linéaire puis énoncer le théorème du rang.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.