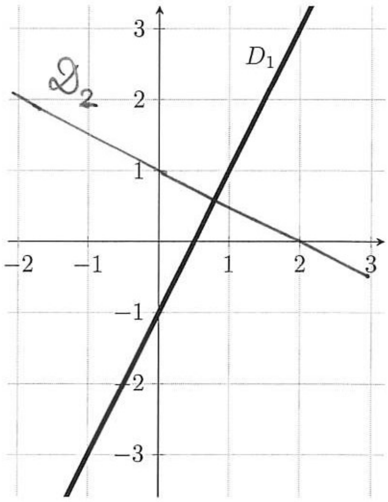
NOM :

PRENOM :

Question 1 (**/4pts).** *Dans cet exercice, on ne demande aucune justification.*

1. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ dessinée ci-contre.



   (a) Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$: (**/1pt)**

   $\begin{cases} x = t \\ y = -1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   (b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$: (**/1pt)**

   $y = -1 + 2x$

2. (a) Dessiner sur le schéma ci-contre la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation cartésienne : $x + 2y = 2$. (**/1pt)**

   (b) Donner un vecteur directeur de D_2 : (**/1pt)**

   $\vec{u} = (2, -1)$

Question 2 (**/6pts).**
Soient G et H deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(G, H)$.

1. à propos du noyau... (**/2pts)**

   (a) Donner la définition de $Ker(\phi)$.

   $Ker(\phi) = \{u \in G : \phi(u) = 0_H\}$

   (b) Compléter l'équivalence :

   ϕ est injective $\iff$ $Ker(\phi) = \{0_G\}$

2. à propos de l'image... (**/2pts)**

   (a) Donner la définition de $Im(\phi)$.

   $Im(\phi) = \{\phi(u), u \in G\}$

   (b) Compléter l'équivalence :

   ϕ est surjective $\iff$ $Im(\phi) = H$

3. à propos du rang... (**/2pts)**

   (a) Donner la définition de $rg(\phi)$. $rg(\phi) = dim(Im(\phi))$

   (b) Énoncer le théorème du rang pour ϕ :

   $dim(G) = dim(Ker(\phi)) + rg(\phi)$

Question 3 (**/5pts**).
Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, -y, -3x-y) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire. (**/2pts**)
2. Déterminer le noyau de f. (**/2pts**)
3. L'application f est-elle injective ? (**/1pt**)

1) Pour tous $u=(x,y)$, $v=(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y') \\ &= (x+x'+2(y+y'), -(y+y'), -3(x+x')-(y+y')) \\ &= (x+2y, -y, -3x-y) + (x'+2y', -y', -3x'-y') \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x+2\lambda y, -\lambda y, -3\lambda x-\lambda y) \\ &= \lambda(x+2y, -y, -3x-y) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

2) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$(x,y) \in Ker(f) \iff f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} x+2y=0 \\ -y=0 \\ -3x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

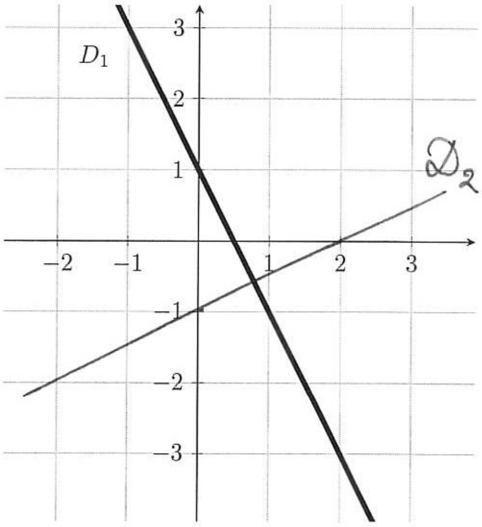
Donc $Ker(f) = \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

3) Donc f est injective.

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/4pts). *Dans cet exercice, on ne demande aucune justification.*



1. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ dessinée ci-contre.

   (a) Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$: (**/1pt)**

   $$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$: (**/1pt)**

   $$y = 1 - 2x$$

2. (a) Dessiner sur le schéma ci-contre la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation cartésienne : $-x + 2y = -2$ (**/1pt)**

   (b) Donner un vecteur directeur de D_2 : (**/1pt)**

   $$\vec{u} = (2, 1)$$

Question 2 (/6pts).
Soient V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$.

1. à propos du noyau... (**/2pts)**

   (a) Donner la définition de $Ker(\phi)$.

   $$Ker(\phi) = \{u \in V : \phi(u) = 0_W\}$$

   (b) Compléter l'équivalence :

   ϕ est injective $\iff$ $Ker(\phi) = \{0_V\}$

2. à propos de l'image... (**/2pts)**

   (a) Donner la définition de $Im(\phi)$.

   $$Im(\phi) = \{\phi(u), u \in V\}$$

   (b) Compléter l'équivalence :

   ϕ est surjective $\iff$ $Im(\phi) = W$

3. à propos du rang... (**/2pts)**

   (a) Donner la définition de $rg(\phi)$. $rg(\phi) = dim(Im(\phi))$

   (b) Énoncer le théorème du rang pour ϕ :

   $$dim(V) = dim(Ker(\phi)) + rg(\phi)$$

Question 3 (/5pts).
Soit f l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$: (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, -x - 2z)$$

1. Montrer que f est linéaire. (**/2pts)**
2. Déterminer le noyau de f. (**/2pts)**
3. L'application f est-elle injective ? (**/1pt)**

1) Pour tous $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= (x+x'+2(y+y')+z+z', -(x+x')-2(z+z')) \\ &= (x+2y+z, -x-2z) + (x'+2y'+z', -x'-2z') \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x + 2\lambda y + \lambda z, -\lambda x - 2\lambda z) \\ &= \lambda(x+2y+z, -x-2z) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

2) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y-z = -4y \\ z = 2y \end{cases}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{(-4y, y, 2y), y \in \mathbb{R}\}$

3) Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas injective.