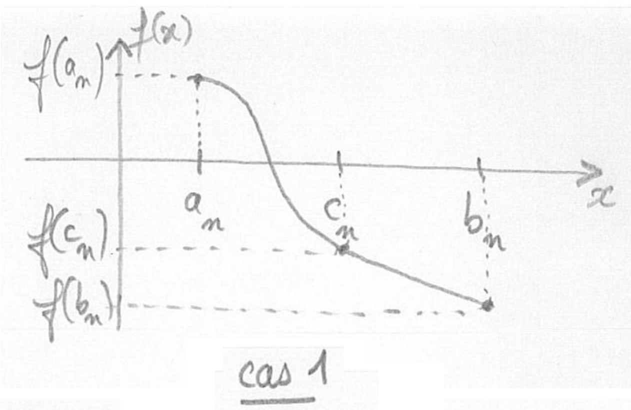
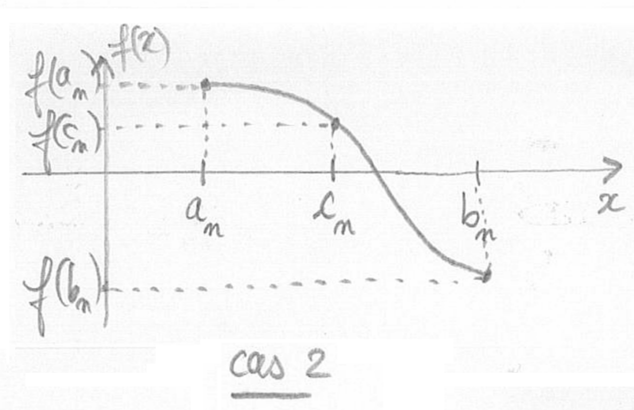
Méthodes numériques — TP21

Exercice 1 — Recherche de zéro par dichotomie

D'après le TVI, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. On a vu qu'on peut obtenir un tel c comme limite des suites (a_n) et (b_n) obtenues de la manière suivante : (complétez les cadres)

- $\boxed{a_0 = \qquad}$ et $\boxed{b_0 = \qquad}$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et on choisit dans lequel des intervalles $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$ on est sûr de trouver une solution à l'équation $f(x) = 0$, on distingue pour cela deux cas de figures illustrés sur la figure ci-dessous :
  - ∗ cas 1 : on choisit $[a_n, c_n]$ si $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$
    et alors $\boxed{a_{n+1} = \qquad}$ et $\boxed{b_{n+1} = \qquad}$
  - ∗ cas 2 : on choisit $[c_n, b_n]$ si $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$
    et alors $\boxed{a_{n+1} = \qquad}$ et $\boxed{b_{n+1} = \qquad}$





On a montré qu'alors (a_n) et (b_n) convergent vers un certain c tel que $f(c) = 0$. En pratique, il faudra arrêter le calcul des suites (a_n) et (b_n) à un certain rang N, et estimer que $c \simeq c_N$, on renverra donc alors $c_N = \dfrac{a_N + b_N}{2}$.

Q1 Comment exprimer rapidement que deux variables réelles x et y sont de signes contraires ?

Q2 Dans cette question on suppose qu'on connaît à l'avance le nombre N d'étapes après lequel on souhaite arrêter le calcul de (a_n) et (b_n). Écrire une fonction `dicho1` prenant en arguments : la fonction f, les réels a et b et un entier N, et renvoyant l'approximation c_N d'une solution de l'équation $f(x) = 0$. Votre fonction utilisera une boucle.

On souhaite utiliser la méthode de la dichotomie pour trouver une racine réelle α du polynôme $P(X) = X^3 + 2X^2 - 2$.

Q3 Pourquoi est-on sûr que ce polynôme admet bien au moins une racine réelle ?

Q4 Définissez la fonction P et tracez son graphe sur l'intervalle de votre choix. Quelles valeurs a et b peut-on choisir pour appliquer la méthode de la dichotomie ?

Q5 Tester la fonction `dicho1` pour P avec différentes valeurs de N en commençant par $N = 5; 10; \ldots$. Vérifiez si la valeur obtenue est bien racine de P. Que constate-t-on en faisant varier le paramètre N ?

En pratique, on ne sait pas à l'avance combien d'étapes N on souhaite effectuer. On propose d'arrêter l'algorithme dès qu'on a trouvé un nombre c_n tel que $f(c_n)$ est suffisamment proche de 0 c'est-à-dire dès que $|f(c_n)| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est "petit".

Q6 Écrire une fonction `dicho2` prenant en arguments : f, a, b et ε et renvoyant un tel c_n. Votre fonction utilisera une boucle. *On rappelle que Python dispose d'une fonction* `abs` *pour la valeur absolue.*

On souhaite utiliser la méthode de la dichotomie pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Q7 Quelle fonction f utiliser ? Autrement dit, de quelle équation du type $f(x) = 0$ le nombre $c = \sqrt{2}$ est-il solution ?

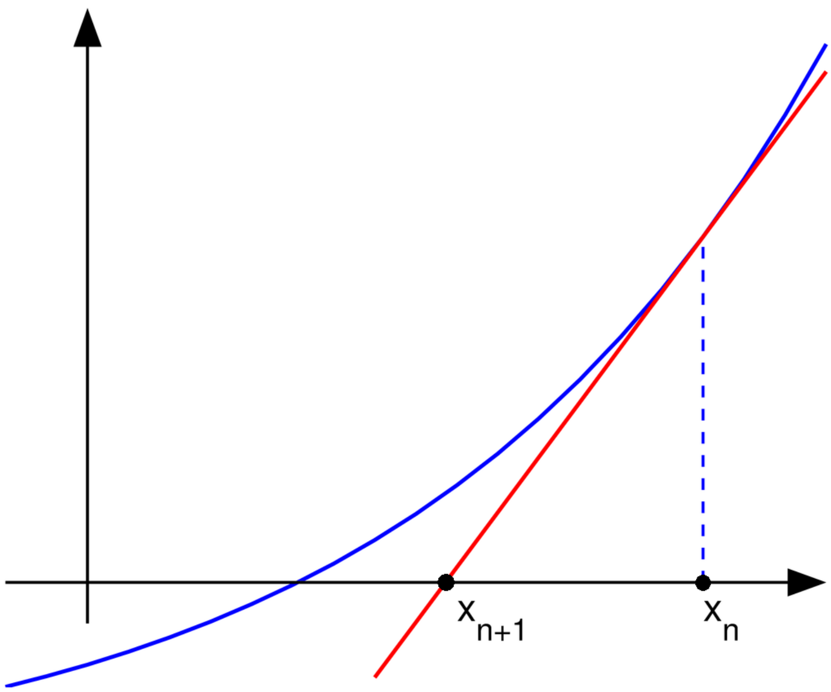
Q8 Tester alors la fonction `dicho2` pour différentes valeurs de ε en confirmant à l'aide de la valeur de $\sqrt{2}$ fournie par Python. Que constate-t-on en faisant varier le paramètre ε ?

Exercice 2 — Recherche de zéro par la méthode de Newton

La méthode de Newton est un autre algorithme permettant de calculer une (approximation d'une) solution x^* de l'équation $f(x) = 0$. Dans la suite de ce TP, on suppose que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $x^* \in I$ et telle que pour tout $x \in I,\ f'(x) \neq 0$.

La méthode de Newton est une méthode itérative au sens où elle consiste à construire une suite (x_n) telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$. La suite (x_n) est définie par récurrence par la donnée de $x_0 \in I$ et par une relation du type $x_{n+1} = g(x_n)$ pour une certaine fonction g dépendant de f et de f' que nous allons expliciter.

Pour obtenir x_{n+1} en fonction de x_n, l'idée de la méthode de Newton est de suivre la tangente à la courbe de f en x_n et de définir x_{n+1} comme l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. Sur la figure ci-dessous, on a tracé le graphe de f en bleu et le graphe de la tangente en x_n en rouge. La tangente coupe l'axe des abscisse au point x_{n+1}.



Q1 Poursuivez le dessin ci-dessus en y plaçant x_{n+2} et x_{n+3}.
Placer graphiquement la limite x^* de la suite (x_n). Quelle équation satisfait x^* ?

Pour obtenir l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n, on utilise l'équation de la tangente au graphe de f en x_n. D'après le cours, cette équation est

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Par définition de la suite (x_n), le point $(x_{n+1}, 0)$ (c'est-à-dire le point de l'axe des abscisses situé en x_{n+1}) doit appartenir à la tangente. On a donc :

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Après résolution, on obtient $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Finalement, la suite (x_n) est définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in I \text{ et,} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Il existe des situations où la méthode de Newton ne converge pas. Dans la suite, on suppose qu'on est dans une situation où (x_n) converge vers x^*. On propose alors de choisir pour approximation de x^* (qui, rappelons-le, vérifie $f(x^*) = 0$) un nombre x_N tel que $|f(x_N)| \leq \varepsilon$ pour une valeur $\varepsilon > 0$ petite.

Q2 Écrire une fonction `Newton` prenant en arguments : `f`, `f_prime`, `x0` et ε et renvoyant l'approximation x_N de x^*.

Q3 Tester la fonction précédente avec $f : x \longmapsto e^x - 2$, $x_0 = 6$ et $\varepsilon = 10^{-4}$. On commencera par définir les fonctions `f` et `f_prime`. On vérifiera qu'on obtient alors une approximation de $\ln(2)$.

Q4 Déterminer à l'aide de la méthode de Newton une approximation de la solution de l'équation $\cos(x) = x$ en partant de $x_0 = 1$. On vérifiera la valeur trouvée par lecture graphique en traçant le graphe de cos et le graphe de $x \longmapsto x$ sur le même dessin.

> **Remarque**
>
> Lorsqu'elle converge, la méthode de Newton est très efficace au sens où la suite (x_n) converge rapidement vers x^*. On peut par exemple démontrer que sous certaines hypothèses il existe une constante $c > 0$ telle que :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - x^*| \leq c\,|x_0 - x^*|^{2^n}.$$
>
> Cette estimation de convergence (dite quadratique) est bien meilleure que celle de la méthode de la dichotomie (dite linéaire) pour laquelle on avait seulement :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - x^*| \leq c\,|x_0 - x^*| \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 3 — M. Dehun et Mme Egalzéro ont une fille

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on définit : $S_n(x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-x)^k}{k}$.

Q1 Écrire une fonction `S` renvoyant $S_n(x)$.

Q2 Tracer l'évolution de $S_n(x)$ en fonction de n pour différentes valeurs de x. Identifier pour quelles valeurs de x la suite $(S_n(x))$ converge.

Q3 On se place dans un cas où la suite $(S_n(x))$ converge. Écrire une fonction `approx` prenant en argument $\varepsilon > 0$ et renvoyant une approximation de la limite ℓ de $(S_n(x))$ en utilisant que si $S_n(x) \simeq \ell$ alors $|S_{n+1}(x) - S_n(x)| \simeq 0$.

Q4 Pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $(S_n(x))$ converge, on note $S(x)$ la limite de cette suite. Tracer une approximation du graphe de la fonction S. Que remarque-t-on ?