

exo 9.2

a) Soit $v \in \text{Im}(g \circ f)$ alors $\exists u \in E$ t.p. $v = g(f(u))$ donc $v = g(a)$ avec $a = f(u)$ donc $v \in \text{Im}(g)$. Ainsi $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$

b) Soit $v \in f(\text{Im}(g))$ alors $\exists u \in \text{Im}(g)$ t.p. $v = f(u)$. Or $u \in \text{Im}(g)$ donc $\exists x \in E$ t.p. $u = g(x)$. Ainsi $v = f(g(x)) = g(f(x))$ car $f \circ g = g \circ f$. Donc $v = g(a)$ avec $a = f(x)$ donc $v \in \text{Im}(g)$.
Ainsi $f(\text{Im}(g)) \subset \text{Im}(g)$.

exo 10 :

$\Rightarrow$ Supposons que $g \circ f = 0$ et montrons que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Soit $v \in \text{Im}(f)$ alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.

Dès lors, $g(v) = g(f(u)) = (g \circ f)(u) = 0_G$ puisque $g \circ f = 0$.

Donc $v \in \text{Ker}(g)$. Ainsi $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ et montrons que $g \circ f = 0$ c'est-à-dire que $\forall u \in E, (g \circ f)(u) = 0_G$.

Soit $u \in E$ alors $f(u) \in \text{Im}(f)$. Or $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$. Donc $f(u) \in \text{Ker}(g)$.

Donc $g(f(u)) = 0_G$ c'est-à-dire $(g \circ f)(u) = 0_G$. Ainsi $g \circ f = 0$.

exo 4 :

1) OK

2) Pour montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{f_a, a \in \mathbb{R}\}$ il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \{f_a, a \in \mathbb{R}\}$ c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ s'écrit comme un f_a pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

Soit donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. On remarque que, puisque f est linéaire :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x \times 1) = x f(1) = f_a(x)$ avec $a = f(1)$

ainsi $f \in \{f_a, a \in \mathbb{R}\}$.