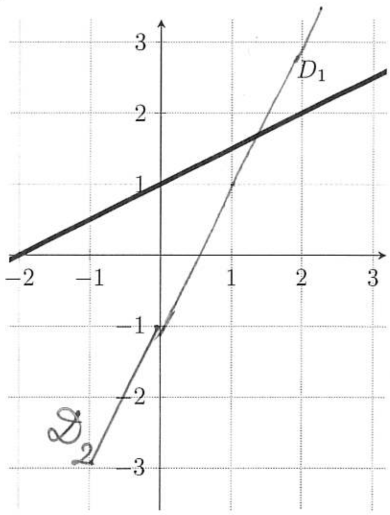
NOM :

PRENOM :

Question 1 (/4pts). *Dans cet exercice, on ne demande aucune justification.*

1. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ dessinée ci-contre.



   (a) Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$: (/1pt)

   $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

   (b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$: (/1pt)

   $y = 1 + \frac{1}{2}x$

2. (a) Dessiner sur le schéma ci-contre la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation cartésienne : $2x - y = 1$. (/1pt)

   (b) Donner un vecteur directeur de D_2 : (/1pt)

   $\vec{u} = (1, 2)$

Question 2 (/6pts).
Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+4y-4z, 3x+y-3z, 5x+4y-6z) \end{array}$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (2,1,2)$ et $u_3 = (0,1,1)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (/2pts)
2. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (/2pts)
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ (/2pts)

1) $\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = (3,3,5) \\ f(0,1,0) = (4,1,4) \\ f(0,0,1) = (-4,-3,-6) \end{array}\right\}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

2) On calcule $rg(u_1, u_2, u_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ (via $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$)
Cette famille de 3 vecteurs est de rang 3, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3) $\left.\begin{array}{l} f(u_1) = f(1,0,1) = (-1,0,-1) = -u_1 = -u_1 + 0u_2 + 0u_3 \\ f(u_2) = f(2,1,2) = (2,1,2) = u_2 = 0u_1 + u_2 + 0u_3 \\ f(u_3) = f(0,1,1) = (0,-2,-2) = -2u_3 = 0u_1 + 0u_2 - 2u_3 \end{array}\right\}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

BCPST 1B — Interro 26 (sujet B) : /10 pts — 2024-2025

NOM :

PRENOM :

Question 1 (**/4pts).** *Dans cet exercice, on ne demande aucune justification.*

1. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ dessinée ci-contre.

   (a) Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$: (**/1pt)**

   $$\begin{cases} x = t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

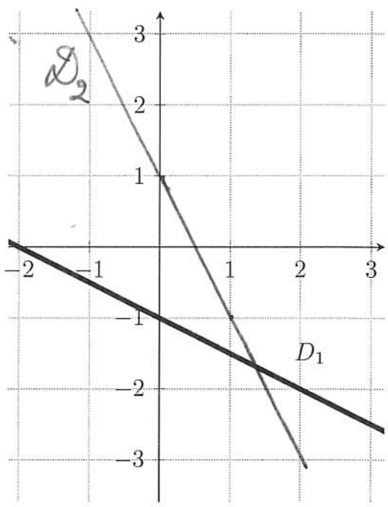
   (b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$: (**/1pt)**

   $$y = -1 - \frac{1}{2}x$$

2. (a) Dessiner sur le schéma ci-contre la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation cartésienne : $2x + y = 1$. (**/1pt)**

   (b) Donner un vecteur directeur de D_2 : (**/1pt)**

   $$\vec{u} = (1, -2)$$



Question 2 (**/6pts).**
Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-3y+3z, 4x-6y+5z, 4x-4y+3z) \end{array}$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,2,2)$ et $u_3 = (0,1,1)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (**/2pts)**
2. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (**/2pts)**
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ (**/2pts)**

1) $f(1,0,0) = (1,4,4)$, $f(0,1,0) = (-3,-6,-4)$, $f(0,0,1) = (3,5,3)$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

2) On calcule $rg(u_1,u_2,u_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$ (via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$). Cette famille de 3 vecteurs est de rang 3, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3) $f(u_1) = f(1,1,0) = (-2,-2,0) = -2u_1 = -2u_1 + 0u_2 + 0u_3$
$f(u_2) = f(1,2,2) = (1,2,2) = u_2 = 0u_1 + u_2 + 0u_3$
$f(u_3) = f(0,1,1) = (0,-1,-1) = -u_3 = 0u_1 + 0u_2 - u_3$
donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$