Programme de colles : semaine 26b, du 19/5 au 23/5

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.
Conformément au colloscope, sur ces 2 semaines, seules auront lieu les colles des lundi 12/5, mardi 13/5, jeudi 22/5 et vendredi 23/5.

1 Informatique en langage Python

Pas d'informatique cette semaine.

2 Géométrie du plan et de l'espace

Le projeté orthogonal a été vu uniquement à travers un exercice.
droites et plans :

- équation paramétrique d'une droite du plan ou de l'espace (resp. d'un plan de l'espace) à l'aide d'un vecteur directeur (resp. d'un couple de vecteurs directeurs)
- équation cartésienne d'une droite du plan (ou d'un plan de l'espace) à l'aide d'un vecteur normal
- savoir passer de l'équation cartésienne à l'équation paramétrique et inversement
- système d'équations cartésienne d'une droite de l'espace. Exemples d'intersections de plans

3 Applications linéaires

On travaille le plus souvent avec $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, mais des exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X]$ ont aussi été présentés en classe.

- définition de la linéarité, proposition : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(0_E) = 0_F$
- savoir montrer qu'une application est ou n'est pas linéaire
- opérations sur les applications linéaires : somme, multiplication par un scalaire, composition, puissances (si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k fois) avec la convention $f^0 = Id_E$), bijection réciproque
- vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire
- noyau d'une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $Ker(f)$ est un s.e.v de E. f est injective ssi $Ker(f) = \{0_E\}$
- image d'une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $Im(f)$ est un s.e.v de F. f est surjective ssi $Im(f) = F$
- si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $Im(f) = Vect(f(u_1), \ldots, f(u_n))$
- rang d'une application linéaire : $\text{rg}(f) = \dim(Im(f)) = \text{rg}(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ où $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de l'espace de départ de f
- théorème du rang (*ce résultat a été admis*). Application : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$ alors :
  - f est surjective ssi $\text{rg}(f) = p$
  - f est injective ssi $\text{rg}(f) = n$
  - f est bijective ssi $\text{rg}(f) = n = p$

  En particulier, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est surjective ssi f est injective ssi f est bijective.

- matrice d'une application linéaire : savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données, et inversement déterminer une application linéaire à partir de sa matrice dans des bases
- une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ
- si $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, correspondance entre l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et l'application $\begin{array}{rccc} : & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$ où A est la matrice de f dans des bases fixées.
- matrices d'une combinaison linéaire, d'une composée (d'une puissance) d'applications linéaires, d'une bijection réciproque
- si A est une matrice de f dans des bases quelconques alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$
- Calcul du noyau, de l'image, du rang d'une application linéaire en utilisant sa matrice

4 Questions de cours

Cette semaine, en plus d'une question de cours parmi celles ci-dessous, toutes les colles devront comporter la question suivante au sein, ou non, d'un exercice plus complet : Déterminer la matrice dans les bases canoniques d'une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ choisie par l'examinateur (avec $n, p \in \{1, 2, 3, 4\}$). On attend une justification courte ne pouvant pas se limiter à "je récupère les coefficients devant x, y, z et je les range en ligne ou en colonne dans la matrice".

1. Donner la définition d'une base et de la dimension d'un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne d'une droite du plan dont l'examinateur donne la représentation graphique.
3. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Laquelle des composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existe ? Préciser son ensemble de départ et d'arrivée, puis montrer que c'est une application linéaire.
4. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $Ker(f)$ et démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
5. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $Ker(f)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur $Ker(f)$ pour que f soit injective.
6. Donner la définition du rang d'une application linéaire puis énoncer le théorème du rang.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.