Chapitre 20 : dérivation

1 Dérivée d'une fonction

1.1 Dérivée en un point

Définition 1
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$.
On dit que <u>f est dérivable en x_0</u> lorsque la limite de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quand x tend vers x_0 existe et est finie.
Cette limite s'appelle le <u>nombre dérivé de f en x_0</u>, on le note $f'(x_0)$:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Remarque 1 :
Via $x = x_0 + h$, on peut se ramener à une limite en 0 :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Exemple 1 :
Fonction carrée : $f : x \longmapsto x^2$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2\,x_0$.
En effet, pour $x \neq x_0$ calcule que :

Exercice 1
En revenant à la définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ en $x_0 > 0$. (Que se passe-t-il pour $x_0 = 0$?)
2. $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ en $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
3. $h : x \longmapsto x^N$ $(N \in \mathbb{N}^*)$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.2 Interprétation graphique

Fixons $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$. La quantité $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est le <u>taux d'accroissement</u> de f au point x_0 pour un déplacement h. C'est le quotient de l'évolution de f entre x_0 et x_0+h sur l'évolution de x entre x_0 et x_0+h.

Graphiquement, ce quotient est la *pente* de la droite (D_h) reliant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0+h, f(x_0+h))$.

En effet, si on note $y = px + q$ une équation cartésienne de cette droite alors :

Dès lors, dire que $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ converge vers une limite finie lorsque $h \to 0$ signifie que les droites (D_h) tendent vers une position limite lorsque les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0+h, f(x_0+h))$ se rapprochent. Cette position limite est la *tangente* à la courbe de f en x_0.

Proposition 1
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. Alors la courbe représentative de f admet une tangente (T_{x_0}) en x_0 dont l'équation est :

$$\boxed{(T_{x_0}) \ : \ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Remarque 2

- Si la courbe représentative de f admet une tangente *horizontale* en x_0 alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$.
- Si la courbe représentative de f admet une tangente *verticale* en x_0 – ce qui est par exemple le cas lorsque $f'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ – la fonction f *n'est pas* dérivable en x_0.

Exercice 2

1. Donner l'équation de la tangente au graphe de $f : x \longmapsto x^3$ en -1.
2. Soit $f : t \longmapsto E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ où $E, \tau > 0$ sont des constantes.
   Démontrer que le point d'intersection de la tangente au graphe de f en 0 et de l'asymptote de f en $+\infty$ a pour abscisse $t = \tau$.

1.3 Dérivées à droite et à gauche

Définition 2
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, x_0 n'étant pas une extrêmité de I. On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en x_0. On note alors :

$$\boxed{f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \text{ et } \boxed{f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Remarque 2 Le chapitre sur les limites entraîne :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ ssi } f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_d(x_0) = f'_g(x_0)}$$

Dans ce cas, on a : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Remarque 3
Si le taux d'accroissement admet une limite à gauche $f'_g(x_0)$ différente de la limite à droite $f'_d(x_0)$, alors f *n'est pas* dérivable en x_0. Graphiquement, la courbe représentative de f a un “pic” en x_0.

Exemple 2 La fonction valeur absolue $f : x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.
En effet, $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc

- pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 1$; et
- pour $x < 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-x}{x} = -1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$, donc f est dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = -1 \neq f'_d(0)$.

Exercice 3
Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en x_0 ?

1. $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$ avec $x_0 = 1$.
2. $g : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ avec $x_0 = 0$.
3. $h : x \longmapsto \begin{cases} x\cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ avec $x_0 = 0$.
4. $k : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ avec $x_0 = 0$.

1.4 Fonction dérivée

Définition 3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point x_0 de I.
On définit alors la fonction dérivée de f sur I par :

$$\begin{array}{rccl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

On note aussi parfois la fonction f' par : $\dfrac{df}{dx}$. Cette notation est particulièrement utile quand des paramètres sont fixés. Par exemple, si $S > 0$ est un paramètre fixé et si $f : x \longmapsto \dfrac{S-x}{S+1}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{df}{dx} =$$

Remarque 3 f est dérivable sur $[a,b]$ $(a<b)$ lorsque f est dérivable en tout point de $]a,b[$ et est dérivable à gauche en b et à droite en a.

Exemple 3 La fonction racine est dérivable sur $]0,+\infty[$ (mais continue sur $[0,+\infty[$).

Remarque 4 ATTENTION À LA RÉDACTION !
On dérive une fonction et non un nombre : $f'(x) \neq f(x)'$!!!!
L'écriture $(x^2)'$ NE SERA PAS ACCEPTÉE dans une copie.

Rappel : "f est continue en x_0" signifie :

Proposition 4
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0.

Démonstration : On cherche à montrer que si f est dérivable en x_0 alors $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$. Or

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \times (x - x_0)$$

avec $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) \in \mathbb{R}$ (limite finie) et $x - x_0 \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.
Donc par produit $f(x) - f(x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$.

Remarque 5
On retient donc que : $\boxed{\text{dérivable implique continue}}$.
Ou encore, par contraposée, que non continue implique non dérivable.
Mais la réciproque est bien sûr fausse : par exemple la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

1.5 Lien avec les équivalents

Proposition 6
Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$.

Démonstration : c'est une simple reformulation :

Par exemple, $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim}$ car

2 Calculs de dérivées

On renvoie à la feuille de cours 4.2 pour un tableau récapitulatif sur les calculs de dérivées, ainsi qu'à la remédiation 5 pour de l'entraînement.

On s'attache ici à la justification de la dérivabilité et aux démonstrations des formules utilisées précédemment.

2.1 Opérations algébriques

Proposition 7
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.
(1) $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
(3) $f\,g$ est dérivable sur I et $\boxed{(f\,g)' = f'\,g + f\,g'}$.
(4) Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}}.$$

Démonstration :

- Les points (1) et (2) ne posent pas de problème (règles usuelles sur les limites).
- Pour (3) : soit $x_0 \in I$; pour $x \in I$ tel que $x \neq x_0$, on écrit que :

$$\begin{aligned}
\tau(x) = \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{\Big(f(x)g(x) - f(x)g(x_0)\Big) + \Big(f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)\Big)}{x - x_0} \\
&= f(x)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Or quand $x \to x_0$, $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} g'(x_0)$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)$; et $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$ car f est continue en x_0 (car dérivable). Ainsi par produit, $\tau(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ ce qu'il fallait démontrer.

- Pour (4) : soit $x_0, x \in I$ tels que $x \neq x_0$, on écrit :

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} \times \frac{1}{g(x)g(x_0)}$$

Or $\dfrac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} -g'(x_0)$ et, puisque g est continue en x_0, $g(x)g(x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)^2$. Ainsi par produit, $\tau(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ ce qu'il fallait démontrer.

Pour finir, la formule pour $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$ résulte de l'application de la formule du produit à $f \times \dfrac{1}{g}$.

Le théorème ci-dessus sert à justifier la dérivabilité d'une fonction en s'appuyant sur la dérivabilité des fonctions usuelles. On pourra donc faire des phrases du type :

"La fonction f est dérivable sur I comme somme et produit de fonctions dérivables sur I."

ou

"La fonction f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas."

Exercice 4

Justifier par une phrase que les fonctions suivantes sont dérivables sur un ensemble que vous préciserez.

1. $f : x \longmapsto 3x^2 - \sin(x)$
2. $g : x \longmapsto x^3 \times \left(\dfrac{1}{x} + e^x\right)$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{3-x}$

Remarque 8

On peut dériver terme à terme une somme de fonctions dérivables : si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en x_0 alors

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0)}$$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. En calculant la dérivée de f de deux manières différentes, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

2.2 Dérivée d'une composée

Proposition 9
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est dérivable sur I, g est dérivable sur J, et que $f(I) \subset J$.
Alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $\boxed{(g \circ f)' = \qquad\qquad\qquad}$

Démonstation :
Soit $x_0 \in I$, notons $y_0 = f(x_0) \in J$, et introduisons la fonction

$$\tau : y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{si } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $x \in I$ tel que $x \neq x_0$ et $f(x) \neq f(x_0)$ on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \tau(f(x)) \end{aligned}$$

et cette dernière égalité est aussi vraie si $f(x) = f(x_0)$. où on a posé $y = f(x)$. Or f est dérivable donc continue en x_0, on a donc : $y = f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0) = y_0$. De plus $\dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} g'(y_0)$. Donc par composition de limites :

$$\frac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g'(y_0) = g'(f(x_0)) = (g' \circ f)(x_0)$$

Et comme $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ on a finalement par produit :

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0) \times (g' \circ f)(x_0)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exemple 4 On retrouve alors les formules usuelles pour les dérivées de composées :
si u est dérivable alors par exemple

1. $(e^u)' =$
   car

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(u^n)' =$
   car

3. $(\cos u)' =$
   car

Le théorème ci-dessus sert à justifier la dérivabilité d'une fonction en s'appuyant sur la dérivabilité des fonctions usuelles. On pourra donc faire des phrases du type :

"La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I comme composée des fonctions dérivables f et g."

mais ATTENTION ! ! contrairement au paragraphe précédent, ici plusieurs ensembles de dérivabilités sont en jeu. La justification complète de la dérivabilité d'une composée implique aussi d'identifier la compatibilité des ensembles de départ et d'arrivée des fonctions composées. Pour être précis, il faudra donc faire des phrases du type :

"La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I car f est dérivable sur I et à valeurs dans J et que g est dérivable sur J."

Exercice 6
Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes puis justifier par une phrase qu'elles sont dérivables sur cet ensemble.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$
2. $g : x \longmapsto \ln(1+e^x)$
3. $h : x \longmapsto \sqrt{x^2-x-1}$

2.3 Dérivée de la bijection réciproque

Proposition 10
Soit $f : I \longrightarrow J$ une application bijective. On suppose que f est dérivable sur I. Soit $x_0 \in I$, et soit $y_0 = f(x_0)$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ et dans ce cas :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{i.e.}$$

Démonstration :
Comme f est dérivable elle est continue, on a alors admis que f^{-1} était aussi continue. Ainsi $f^{-1}(y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} f^{-1}(y_0) = x_0$. Comme de plus $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ on a par composition de limites, pour $y \neq y_0$ (donc $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) = x_0$ puisque f est bijective) :

$$\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \frac{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}{f^{-1}(y)-x_0} \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$$

Par passage à l'inverse, on peut alors dire que :

- si $f'(x_0) = 0$, alors
- si $f'(x_0) \neq 0$ alors

Remarque 11

On retrouve la formule de la dérivée de f^{-1} en dérivant l'identité $(f \circ f^{-1})(x) = x$ qui donne $(f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$ donc $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Exemple 5

La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ est bijective et sa dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque $\ln : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et : $\forall y > 0$,

Exercice 7

Soit $g : x \longmapsto (x-1)^3 + 4$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $[0,3]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que g^{-1} est dérivable en 5 et calculer $(g^{-1})'(5)$.
3. Montrer que g^{-1} n'est pas dérivable en 4.