3 Dérivées d'ordre supérieur, régularité

3.1 Dérivée n-ème

Définition 12
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On dit que f est deux fois dérivable sur I lorsque f' est également dérivable sur I. Dans ce cas, on note $f^{(2)} = (f')'$ la dérivée de f', appelée dérivée seconde de f.

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est dérivable n fois sur I lorsqu'on peut la dériver successivement n fois, et on définit sa dérivée n-ème, notée $f^{(n)}$ par récurrence par :

- $f^{(0)} = f$, et
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Remarque 13
Une autre notation pour $f^{(n)}$ est $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple 6

1. La fonction exp est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\exp^{(n)} = \exp$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \longmapsto x^m$ est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

En effet, pour $n = 0$, cette formule donne bien $f^{(0)} = f$; et si cette formule est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

- si $n \leq m-1$, on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$ avec $m-n \geq 1$ donc
- si $n = m$ alors pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)} = \dfrac{m!}{0!} x^0 = m!$ donc $f^{(n+1)}(x) = 0$;
- si $n > m$ alors $f^{(n)} = 0$ donc $f^{(n+1)} = 0$.

ce qui montre que la formule est bien vraie au rang $n+1$.

Remarque 14
Souvent pour déterminer l'expression de la dérivée n-ème d'une fonction, on intuite une formule en calculant les premières dérivées, puis on la démontre par récurrence.

Exercice 8
Déterminer la dérivée n-ème des fonctions suivantes :
1. $f : x \longmapsto e^{2x}$
2. cos

Proposition 15
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f et g sont dérivables n fois, alors :
1. pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois, et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$,
2. fg est dérivable n fois,
3. si $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est dérivable n fois,
4. si g ne s'annule pas alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable n fois.

Démonstration :
1. Cela découle de la linéarité de la dérivation (et d'une récurrence).
2. Pour $n = 1$, le résultat est vrai puisqu'on a $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus f et g sont deux fois dérivables alors on peut aussi écrire que
$$(fg)^{(2)} = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')' = f^{(2)}g + f'g' + f'g' + fg^{(2)} = f^{(2)}g + 2f'g' + fg^{(2)}$$
On en déduit donc que si f et g sont 3 fois dérivables alors fg l'est aussi et que $(fg)^{(3)}$ s'exprime en fonction de $f, f', f^{(2)}, f^{(3)}$ et de $g, g', g^{(2)}, g^{(3)}$. Une récurrence permettrait de formaliser ce raisonnement [1].
3. Montrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 1$, si f et g sont dérivables alors $g \circ f$ aussi, et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et prenons f et g dérivables $n+1$ fois. Alors, g', f' et f sont dérivables n fois, et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Par hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est dérivable n fois, donc d'après 2. le produit $f' \times (g' \circ f)$ est dérivable n fois. Ainsi $(g \circ f)'$ est dérivable n fois, donc $g \circ f$ est dérivable $n+1$ fois.
4. On applique 3. avec la fonction inverse pour obtenir que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable n fois, puis on applique le résultat 2. sur le produit $f \times \dfrac{1}{g}$.

3.2 Régularité

Définition 16
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et on note $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou simplement $f \in \mathcal{C}^n(I)$, lorsque f est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque 17
- Par exemple, $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions
- Dans la définition de $\mathcal{C}^n$ on ne demande pas que les dérivées intermédiaires $f^{(k)}$ pour $k < n$ soient continues : elles le sont automatiquement puisqu'elles sont
- Pour $n = 0$, dire que f est $\mathcal{C}^0$ sur I signifie donc simplement que f est *continue* sur I. On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^n$

1. il existe une formule pour $(fg)^{(n)}$ appelée formule de Leibniz mais qui est hors programme.

Définition 18
On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des telles fonctions f.

Exemple 7 Toute fonction polynomiale est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[) \cap \mathcal{C}^0([0,+\infty[)$.

Remarque 19
Les résultats de la proposition 15 restent vrais en remplaçant “dérivable n fois” par “de classe $\mathcal{C}^n$”.
Par exemple, $f, g \in \mathcal{C}^n(I) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{C}^n(I)$.

Moralité : les phrases justifiant qu'une fonction est dérivable (cf paragraphe 2) s'adaptent pour montrer qu'une fonction est dérivable n fois, ou de classe $\mathcal{C}^n$ (y compris $\mathcal{C}^0$, i.e.   ), ou de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 9
Justifier par une phrase que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

Remarque 20
Attention, $\boxed{\text{dérivable } n \text{ fois} \neq \text{de classe } \mathcal{C}^n}$ puisqu'être $\mathcal{C}^n$ requiert en plus la continuité de la dérivée n-ème. Si l'on note D^n l'ensemble des fonctions dérivables n fois on a : $D^n \subsetneq \mathcal{C}^n$. Voici ci-dessous un exemple dans le cas $n = 1$.

Exemple 8 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$ Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En effet :

- <u>la fonction f est dérivable en 0</u>. En effet, pour $x < 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc $f'_g(0) = 0$; et pour $x > 0$:
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
car

donc $f'_d(0) = 0 = f'_g(0)$. Ainsi $f'(0) = 0$.
- <u>et f' n'est pas continue en 0</u>. En effet, pour $x > 0$ on a
$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \times (-\frac{1}{x^2}) \times \cos(\frac{1}{x}) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$
avec $2x \sin(1/x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (même argument qu'au dessus) et $\cos(1/x)$ qui n'a pas de limite en 0 car

donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.

Notons toutefois que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur

Exercice 10
Les fonctions suivantes sont-elles :

- continues ?
- dérivables ?
- de classe $\mathcal{C}^1$?

sur leurs ensembles de définition.

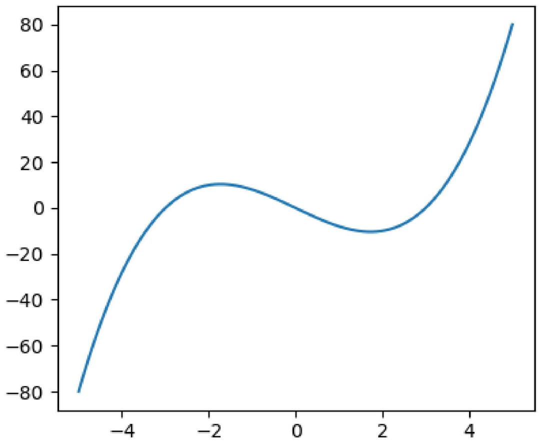
1. $f : x \longmapsto \sqrt{1+|x|}$
2. $g : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
3. $h : x \longmapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x > 1 \\ \ln(3-2x) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$
4. $u : x \longmapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 1 \\ \ln(3-2x) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$
5. $v : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

4.1 Théorème de Rolle

Définition 21
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0 lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall x \in I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon],\ f(x) \geq f(x_0)$$
(resp. $\forall x \in I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon],\ f(x) \leq f(x_0)$).

Remarque 22
- On parle d'extremum local pour désigner un minimum ou un maximum local.
- Par opposition à *local*, on dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum *global* (ou simplement, un minimum) en x_0 lorsque : $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0)$.
- Dire que f admet un minimum *local* en x_0 signifie donc que pour un certain $\varepsilon > 0$, $f_{|I\cap[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]}$ admet un minimum *global* en x_0.
- Si f admet un minimum global en x_0 alors f admet un minimum local en x_0. La réciproque est fausse : par exemple, la fonction ci-dessous admet un minimum local en $x_0 = 2$ mais ce n'est pas un minimum global.



Proposition 23
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ un point qui n'est pas une extrêmité de I. Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration :
Supposons que x_0 soit un minimum local (refaire la preuve dans le cas d'un maximum en relisant le cours). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $f(x) \geq f(x_0)$. Comme x_0 n'est pas une extrêmité de I, on peut – quitte à prendre ε plus petit – supposer que $I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Dès lors :
- pour $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0[$,
- pour $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon]$,

Remarque 24

- Le fait que x_0 ne soit pas une borne de I est essentiel : par exemple, la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f : x \longmapsto x$
- La réciproque de ce théorème est fausse : si $f'(x_0) = 0$ alors f n'admet pas forcémnet d'extremum local en x_0. Par exemple,
- Enfin, une fonction peut aussi admettre un extremum local en un point sans y être dérivable comme par exemple la fonction valeur absolue en 0.

Théorème 25 (théorème de Rolle)
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :
Comme f est continue sur $[a,b]$ qui est un segment, elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe $\underline{c}, \overline{c} \in [a,b]$ tels que :

$$\forall x \in [a,b],\ m = f(\underline{c}) \leq f(x) \leq f(\overline{c}) = M.$$

Si $m = M$ alors f est constante sur $[a,b]$ donc tout point $c \in]a,b[$ convient.
Si $m < M$ alors $f(a) \neq m$ ou $f(a) \neq M$. Supposons par exemple que $f(a) \neq m$. Alors $f(\underline{c}) \neq f(a)$ donc $\underline{c} \neq a$; et comme $f(a) = f(b)$ on a aussi $\underline{c} \neq b$. Ainsi $\underline{c} \in]a,b[$ de sorte que f est dérivable en $\underline{c}$. Finalement, f admet un minimum en $\underline{c}$ et y est dérivable, donc $f'(\underline{c}) = 0$.

Exemple 9 Soit P un polynôme admettant deux racines distinctes $x_1 < x_2$ alors P' s'annule au moins une fois entre x_1 et x_2.

4.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 26 (TAF)
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*. Alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration :
Dans le cas où $f(a) = f(b)$ on retrouve le théorème de Rolle. Dans le cas général, on applique le théorème de Rolle à la fonction

$$g : x \longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Comme f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ il en est de même de g. De plus,

Interprétation graphique : il existe un point $c \in]a,b[$ où la pente de la tangente, $f'(c)$, est égale au taux d'accroissement de f entre a et b, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Graphiquement, la tangente en c (en rouge ci-dessous) est parallèle à la droite reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (en bleu ci-dessous).

Interprétation cinématique : si votre vitesse *moyenne* sur un trajet est v alors il existe un moment dans le trajet où votre vitesse *instantanée* est v.
En effet, notons $x(t)$ la distance que vous avez parcouru après t secondes, et considérons le voyage total effectué pendant l'intervalle de temps $[0,T]$. Alors votre vitesse *moyenne* est $\dfrac{x(T)-x(0)}{T-0}$, tandis que votre vitesse instantanée à l'instant t (celle affichée au compteur de la voiture par exemple) est $x'(t)$. D'après le TAF, il existe $t \in]0,T[$ tel que $x'(t) = \dfrac{x(T)-x(0)}{T-0}$.

Le théorème des accroissements finis permet d'obtenir des encadrements. La proposition suivante en est une application immédiate (à redémontrer au moment de son utilisation dans les exercices).

Proposition 27
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que f' est bornée sur $]a, b[$ i.e. qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in]a, b[,\ m \leq f'(x) \leq M$. Alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Démonstration :
Il suffit de dire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $m \leq f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$.

Exercice 11
1. Soit $x > 0$. Montrer que $\dfrac{1}{x+1} < \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$.
2. Soit $x > 0$. Montrer que $\dfrac{1}{(x+1)^2} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 12
1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3}{2}\left((k+1)^{2/3} - k^{2/3}\right) \leq \dfrac{1}{k^{1/3}}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}}$.

Une autre application immédiate (à redémontrer au moment de son application dans les exercices) est la suivante.

Proposition 28
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. On suppose que f' est bornée sur I i.e. qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq K$. Alors

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|.$$

Démonstration : L'hypothèse sur f' se réécrit : $\forall x \in I,\ -K \leq f'(x) \leq K$. En travaillant sur l'intervalle $[x, y]$ (si $x < y$) on a donc d'après la proposition précédente : $-K(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq K(y-x)$ ou encore $|f(x) - f(y)| \leq K(y-x) = K|x-y|$.

Cette dernière proposition est à interpréter de la manière suivante : la valeur absolue de la dérivée f' fournit une borne sur la capacité de f à éloigner deux points de I. Si x et y sont deux points de I éloignés d'une distance d (i.e. $|x-y| = d$) et si $|f'| \leq K$ sur I, alors $f(x)$ et $f(y)$ seront au maximum éloignés d'une distance Kd (i.e. $|f(x) - f(y)| \leq Kd$).

Exercice 13
1. Soit $\alpha > 1$. Montrer que : $\forall x, y \in]0, 1],\ |x^\alpha - y^\alpha| \leq \alpha|x-y|$.
2. Montrer que pour tous $x, y \geq 0$ on a $\left|\sqrt{x+2} - \sqrt{y+2}\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,|x-y|$.

Un cas particulier important est celui où un des deux points est un point fixe de f, et où $K < 1$. Supposons en effet que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable sur I avec $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq K < 1$ et que $a \in I$ soit tel que $f(a) = a$. Alors (prenant $y = a$ dans la proposition précédente) on a :

$$\forall x \in I,\ |f(x) - f(a)| \leq K|x - a|$$

donc

$$\forall x \in I,\ |f(x) - a| \leq K|x - a|.$$

Comme $K < 1$ cela signifie que f “rapproche” les points de I vers a (on dit que a est un point fixe *attracteur*). Précisément, on a la proposition suivante (à redémontrer au moment de son application dans les exercices) :

Proposition 29
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow I$, $a \in I$ et $K \in [0, 1[$. On suppose que f est dérivable sur I avec : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq K$, et que $f(a) = a$. Alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$ est telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - a| \leq K^n|x_0 - a|$$

et en particulier $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Démonstration :
On démontre l'inégalité souhaitée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a bien $|x_0 - a| \leq K^0|x_0 - a|$. Supposons que $|x_n - a| \leq K^n|x_0 - a|$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors,

Exercice 14
Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$ où $f : x \longmapsto \sqrt{x+2}$.

1. Justifier que (x_n) est bien définie.
2. Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Quelle(s) valeur(s) peut prendre ℓ ?
3. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 15
Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Justifier que (x_n) est bien définie en montrant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [1,2]$.
2. Si (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, quelle(s) valeur(s) peut prendre ℓ ?
3. Montrer que pour tous $x, y \in [1,2],\ |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x-y|$.
4. Montrer que (x_n) converge.

4.3 Dérivée et sens de variation

Proposition 30
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors on a les équivalences suivantes :

1. f est croissante sur I ssi $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$;
2. f est décroissante sur I ssi $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$;
3. f est constante sur I ssi $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Démonstration :

1. Supposons f croissante, et soit $x_0 \in I$. Pour $x \geq x_0$, on a $f(x) \geq f(x_0)$, et pour $x \leq x_0$ on a $f(x) \leq f(x_0)$. Ainsi $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ sont de même signe, donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$. En passant à la limite $x \to x_0$, on trouve $f'(x_0) \geq 0$.
   Réciproquement, supposons $f' \geq 0$ sur I, et soient $x, y \in I$ avec $x \geq y$. Comme f est dérivable sur I, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]y, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \geq 0$ donc $f(x) - f(y) \geq 0$ i.e. $f(x) \geq f(y)$. Ainsi f est croissante.
2. On applique 1. à $-f$.
3. f est constante ssi f est croissante et décroissante d'où le résultat en utilisant 1 et 2.

Remarque 31
Attention, l'hypothèse "I est un intervalle" est CAPITALE ! !
Par exemple, la fonction inverse $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée ($f' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$) strictement négative sur $\mathbb{R}^*$, mais il est faux de dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $-1 \leq 1$ et pourtant $f(-1) = -1 \leq f(1) = 1$. (De manière générale, il n'est pas recommandé de parler de sens de variation sur un ensemble qui n'est pas un intervalle.)

De même une fonction dérivable $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D,\ f'(x) = 0$ n'est pas forcément constante sur D : elle n'est constante que sur les *intervalles* inclus dans D. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $\forall x > 0,\ f(x) = 1$ et $\forall x < 0,\ f(x) = -1$, est telle que f' est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$; f est constante sur les intervalles formant $\mathbb{R}^*$ i.e. sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

Remarque 32
Attention, la proposition précédente ne fournit pas d'équivalence concernant la stricte monotonie, au sens où il est FAUX que "f est strictement croissante sur I ssi $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$".
Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée $x \longmapsto 3x^2$ s'annule en 0.
Seule l'implication "si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I" est vraie. En fait, on a même la proposition suivante que nous admettons :

Proposition 33
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. S'il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n \in I$ tels que :

- $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f'(x_k) = 0$, et
- $\forall x \in I \backslash \{x_1, \ldots, x_n\},\ f'(x) > 0$

(autrement dit si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur I.