Exercice 4 (Algèbre linéaire)**.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomporphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble E des matrices M qui commuttent avec A, c'est-à-dire l'ensemble

$$E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ AM = MA\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer, en justifiant proprement, l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, -1, -2)$ et $w = (2, 1, 0)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
   (c) Déterminer $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (d) Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   (e) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $B = P^{-1}MP$.
   (a) Montrer que : $M \in E \iff BD = DB$.
   (b) En déduire que si $M \in E$ alors il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P\Delta P^{-1}$.
5. Dans cette question, on considère l'application ϕ suivante :

$$\phi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ Q & \longmapsto & (Q(2), Q(4), Q(8)) \end{array}$$

   On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2.

   (a) Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.
   (b) Montrer que $Ker(\phi) = \{0\}$.
   (c) En déduire que ϕ est un isomorphisme. *On pourra s'intéresser au rang de ϕ.*
6. Pour $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $Q(M) = aM^2 + bM + cI_3$. On note F l'ensemble suivant :

$$F = \{Q(A), \ Q \in \mathbb{R}_2[X]\}.$$

   Dans cette question on montre que $E = F$ par double inclusion.

   (a) Montrer que $F \subset E$.
   (b) Soit $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. En utilisant la question 5 montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(D) = \Delta$.
   (c) En utilisant la question 4, en déduire que $E \subset F$. *On rappelle que $A = PDP^{-1}$.*