Ensuite, l'arrivée du vacancier étant indépendante des déplacements du crabe, les variables V_k et X_k sont indépendantes.

Donc $\mathbb{E}(V_k X_k) = \mathbb{E}(V_k)\mathbb{E}(X_k)$

On a déjà vu que $\mathbb{E}(X_k) = 2p-1$, et comme V_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$ on a $\mathbb{E}(V_k) = \frac{n-k+1}{n}$.

Finalement,

$$\mathbb{E}(S_T) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(V_k)\mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} \times (2p-1)$$

$$= \frac{2p-1}{n} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$$

$$= \frac{2p-1}{n} \sum_{l=1}^{n} l \qquad \left(\text{via } l = n-k+1 \text{ donc } 1 \leq k \leq n \Leftrightarrow -n \leq -k \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq n-k+1 \leq n\right)$$

$$= \frac{2p-1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2p-1)}{2}$$

début du corrigé :

Exercice 4 :

1) • Notant O la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$A \times O = O = O \times A$ donc $O \in E$

• Soient $M_1, M_2 \in E$ alors $AM_1 = M_1 A$ et $AM_2 = M_2 A$ donc

$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1 A + M_2 A = (M_1 + M_2)A$

donc $M_1 + M_2 \in E$

• Soient $M \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $AM = MA$ donc

$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$

donc $\lambda M \in E$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5x + 6y - 3z \\ x + 6y - z \\ -x + 2y + 3z \end{pmatrix}$$

donc $f(x, y, z) = (5x + 6y - 3z,\ x + 6y - z,\ -x + 2y + 3z)$

3) a) On calcule

$$\mathrm{rg}(u, v, w) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$$

$$= 3$$

donc la famille (u, v, w) a un rang égal à son nombre de vecteurs donc cette famille est libre. Comme de plus elle compte 3 vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculons, grâce à l'expression trouvée en 1) :

$f(u) = f(1, 0, 1) = (2, 0, 2) = 2(1, 0, 1) = 2u + 0v + 0w$

$f(v) = f(0, -1, -2) = (0, -4, -8) = 4(0, -1, -2) = 0u + 4v + 0w$

$f(w) = f(2, 1, 0) = (16, 8, 0) = 8(2, 1, 0) = 0u + 0v + 8w$

On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

c) Comme

$id_{\mathbb{R}^3}(u) = u = (1,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3$

$id_{\mathbb{R}^3}(v) = v = (0,-1,-2) = 0e_1 - 1e_2 - 2e_3$

$id_{\mathbb{R}^3}(w) = w = (2,1,0) = 2e_1 + 1e_2 + 0e_3$

on a $\mathrm{Mat}_{B',B}(id_{\mathbb{R}^3}) = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) (n.b : ici, la valeur de P^{-1} était donnée par l'énoncé, il serait donc maladroit de résoudre $PX = Y$ pour trouver P^{-1} : cf concours blanc)

Notons $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule que

$$QP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3$$

et $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3$

Donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

e) On calcule :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 16 \\ 0 & -4 & 8 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

4) a) On a :

$$M \in E \iff AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1}$$
$$\iff P^{-1}PDP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1}$$
$$\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPDP^{-1}P$$
$$\iff DB = BD$$

b) Déterminons quelles sont les matrices $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $BD = DB$:

$$BD = DB \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2a & 4b & 8c \\ 2d & 4e & 8f \\ 2g & 4h & 8i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 4d & 4e & 4f \\ 8g & 8h & 8i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2a = 2a,\ 4b = 2b,\ 8c = 2c,\ 2d = 4d \\ 4e = 4e,\ 8f = 4f,\ 2g = 8g,\ 4h = 8h \text{ et } 8i = 8i \end{pmatrix}$$

$$\iff b = c = d = f = g = h = 0$$

$$\iff B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale.}$$

Dès lors, si $M \in E$, on a d'après a) $BD = DB$, donc la matrice $B = P^{-1}MP$ est diagonale, notons-la Δ.
Il existe donc une matrice diagonale Δ telle que $\Delta = P^{-1}MP$ donc $P\Delta = MP$ donc $M = P\Delta P^{-1}$.

5) a) Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(Q_1 + Q_2) = \big((Q_1+Q_2)(2), (Q_1+Q_2)(4), (Q_1+Q_2)(8)\big)$$
$$= \big(Q_1(2) + Q_2(2),\ Q_1(4) + Q_2(4),\ Q_1(8) + Q_2(8)\big)$$
$$= \big(Q_1(2), Q_1(4), Q_1(8)\big) + \big(Q_2(2), Q_2(4), Q_2(8)\big)$$
$$= \phi(Q_1) + \phi(Q_2).$$

De même,

$$\phi(\lambda Q_1) = (\lambda Q_1(2), \lambda Q_1(4), \lambda Q_1(8))$$
$$= \lambda(Q_1(2), Q_1(4), Q_1(8))$$
$$= \lambda\phi(Q_1)$$

Donc $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.

b) Comme $Ker(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, on a $\{0\} \subset Ker(\phi)$. Montrons maintenant que $Ker(\phi) \subset \{0\}$.

Soit $Q \in Ker(\phi)$ alors $\phi(Q) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $Q(2) = Q(4) = Q(8) = 0$

Donc Q admet 3 racines distinctes.

Comme de plus $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ est de degré inférieur à 2, Q a donc strictement plus de racines que son degré. Cela impose que $Q = 0$.

Ainsi $Ker(\phi) \subset \{0\}$ et donc $Ker(\phi) = \{0\}$.

c) Comme $Ker(\phi) = \{0\}$, on sait que ϕ est injective.

Comme $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$ on en déduit que $rg(\phi) = dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.

Mais alors $rg(\phi) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ donc ϕ est aussi surjective.

Finalement, ϕ est bien un isomorphisme.

remarque : à cette question, on accepte aussi de dire : phi est injective et dim(espace de départ)=dim(espace d'arrivée) donc phi est bijective

6) a) Soit $M \in F$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $M = Q(A)$. Notons $Q = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors $M = aA^2 + bA + cI_3$

Dès lors,
$$AM = A(aA^2 + bA + cI_3)$$
$$= aA^3 + bA^2 + cA$$
$$= (aA^2 + bA + cI_3)A = MA$$

donc $M \in E$. Ainsi $F \subset E$.

b) Notons $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Comme $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et que $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ est bijective (donc surjective) d'après 5), il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\phi(Q) = (x,y,z)$, c'est-à-dire que $Q(2) = x$, $Q(4) = y$ et $Q(8) = z$.

Notant $Q = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a donc

$$\begin{aligned} Q(D) &= aD^2 + bD + cI_3 \\ &= a\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^2 + b\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a2^2 + b2 + c & 0 & 0 \\ 0 & a4^2 + b4 + c & 0 \\ 0 & 0 & a8^2 + b8 + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q(2) & 0 & 0 \\ 0 & Q(4) & 0 \\ 0 & 0 & Q(8) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \\ &= \Delta \end{aligned}$$

Ainsi il existe bien $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(D) = \Delta$.

c) Soit $M \in E$. D'après la question 4) il existe une matrice diagonale Δ tel que $M = P\Delta P^{-1}$. En utilisant la question précédente il existe donc $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(D) = \Delta$. Dès lors, on calcule que

$$\begin{aligned} Q(A) = Q(PDP^{-1}) &= a(PDP^{-1})^2 + bPDP^{-1} + cI_3 \\ &= aPDP^{-1}PDP^{-1} + bPDP^{-1} + cI_3 \end{aligned}$$

$$= aPD^2P^{-1} + bPDP^{-1} + cPI_3P^{-1}$$
$$= P(aD^2 + bD + cI_3)P^{-1}$$
$$= PQ(D)P^{-1}$$
$$= P\Delta P^{-1}$$
$$= M$$

Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(A) = M$, donc $M \in F$.

Finalement $E \subset F$, et par double inclusion $E = F$.

Remarque : Ainsi, l'ensemble des matrices M qui commutent avec A est $E = F = \{aA^2 + bA + cI_3,\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$
$$= \mathrm{Vect}(A^2, A, I_3)$$

On peut montrer que la famille (I_3, A, A^2) est libre, il s'agit donc d'une base de E et $\dim(E) = 3$.