Feuille de cours 21 : lois usuelles

Dans tout ce document $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une variable aléatoire réelle finie.

1 Loi certaine

Définition 1
On dit que X suit une loi certaine lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur, c'est-à-dire lorsque $X(\Omega) = \{a\}$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Autrement dit X est une application constante : $X = a$.

Remarque 2
On a alors $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Proposition 3
Si X est certaine et $X = a$, alors $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = 0$.

2 Loi de Bernoulli

Définition 4
On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \{0,1\}$, et
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Remarque 5
Cela définit bien une loi de probabilité puisque :

Remarque 6
La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ modélise *(toutes)* les expériences aléatoires à 2 issues :

1. succès, représenté par $X = 1$, de probabilité p,
2. échec, représenté par $X = 0$, de probabilité $1 - p$.

Exercice 1
Tracer la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1/4)$.

Définition 7 (fonction indicatrice)
Soit Ω un ensemble et soit $A \subset \Omega$. On appelle fonction indicatrice de A et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction (ou variable aléatoire) :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A & : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

Par exemple, si $\Omega = [\![1, 20]\!]$ et $A = [\![5, 12]\!]$, alors $\mathbb{1}_A(3) =$ et $\mathbb{1}_A(10) =$

Proposition 8
Si $A \subset \Omega$, alors la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.

Proposition 9
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

Application : Pour $A \subset \Omega$, on a : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) =$

Remarque 10
Toute variable aléatoire Y qui ne prend que 2 valeurs peut s'exprimer à partir d'une variable X suivant une loi de Bernoulli. Par exemple, soit Y suivant une loi de Rademacher i.e. telle que : $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p,\ \mathbb{P}(Y = -1) = 1 - p$. Alors on peut écrire :

$$Y = \qquad\qquad\qquad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$$

En effet,

Et on a donc $\mathbb{E}(Y) =$
et $\mathbb{V}(Y) =$

3 Loi uniforme

Définition 11
On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ lorsque :

- $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$, et
- $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{n}$.

Remarque 12
La loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ modélise les situations d'équiprobabilité dont les résultats sont $1, 2, \ldots, n$.

Exercice 2
Vérifier que la formule définit bien une loi de probabilité.

Exercice 3
Tracer la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,4]\!])$.

Proposition 13
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, alors $E(X) = \dfrac{1+n}{2}$.

Remarque 14
On peut aussi considérer une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ où $a < b$ sont deux entiers. On dira que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ lorsque $Y(\Omega) = [\![a,b]\!]$ et $\forall k \in [\![a,b]\!],\ \mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{1}{b-a+1}$.
On peut obtenir une telle variable aléatoire Y à partir de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,b-a+1]\!])$ en posant

$$Y =$$

On trouve ainsi que $\mathbb{E}(Y) =$

4 Loi binomiale

Exercice 4
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement et avec remise 4 boules dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient la boule numéro 10. Déterminer la loi de X.

Définition 15
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et
- $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$.

Remarque 16
La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ modélise le nombre de succès lorsqu'on répète n fois et de manière indépendante une expérience dont la probabiltié de succès est p.
Par exemple, la variable aléatoire X égale au nombre de 6 obtenus en 20 lancers d'un dé équilibré est telle que $X \hookrightarrow$

Remarque 17
Dans le cas $n=1$, on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p) \iff$

Exercice 5
Vérifier que cette formule définit bien une loi de probabilité.

Exercice 6
Consulter le lien suivant donnant l'histogramme et la fonction de répartition d'une loi binomiale : `https://www.geogebra.org/m/YGxA8ESB`
Modifier les paramètres n et p (passer en plein écran) pour voir leur impact sur la loi binomiale.

Proposition 18
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, reconnaître la loi de X (et **préciser les valeurs des paramètres**) :

1. On pioche successivement et au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes en remettant la carte tirée dans le jeu après chaque tirage. X est le nombre de cœurs obtenus.
2. Une urne contient 20 boules numérotées de 0 à 19. On tire une boule au hasard et on note X son numéro.
3. On mélange les chiffres du nombre 10011 et X est le dernier chiffre du nouveau nombre ainsi obtenu.
4. Une urne contient 6 boules vertes et 14 boules rouges, on tire avec remise 7 boules dans l'urne et on compte le nombre X de boules vertes obtenues.
5. Une urne contient 10000 boules dont : 20% sont rouges et 80% sont vertes. On tire sans remise 10 boules dans l'urne et on compte le nombre X de boules vertes obtenues.
6. Une loterie comporte 100 billets dont un seul est gagnant. On tire les billets un par un et sans remise. X est le rang d'apparition du billet gagnant.
7. On achète 1 euro un billet de loterie qui offre une chance sur 100 de gagner 10 euros. X est notre gain.