

exo 12 :

1) Soit $f: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. On applique le TAF sur $[k, k+1]$.
 $: t \mapsto t^{2/3}$

- f est C^0 sur $[k, k+1]$
 - f est dérivable sur $]k, k+1[$
- (donc $\exists c \in]k, k+1[$ $\frac{f(k+1) - f(k)}{k+1 - k}$)

$$\text{càd } \frac{2}{3} c^{-1/3} = (k+1)^{2/3} - k^{2/3} \quad \text{donc} \quad \frac{3}{2} ((k+1)^{2/3} - k^{2/3}) = \frac{1}{c^{1/3}}$$

$$\text{Or } c \in]k, k+1[\text{ donc } c > k > 0 \text{ donc } \frac{1}{c^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$$

$$\text{Donc } \frac{3}{2} ((k+1)^{2/3} - k^{2/3}) \leq \frac{1}{k^{1/3}}$$

$$2) \text{ D'après 1), } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1/3}} \geq \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n ((k+1)^{2/3} - k^{2/3}) = \frac{3}{2} ((n+1)^{2/3} - 1^{2/3})$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \geq \frac{3}{2} (n+1)^{2/3} - \frac{3}{2}$$

$$\text{Comme } \frac{3}{2} (n+1)^{2/3} - \frac{3}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ la th' de comparaison donne } S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$