

32E 2025 : Problème 2, partie A.

$k > 0$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $e_k(x) = k e^{-(k+1)\ln(x)} = \frac{k}{x^{k+1}}$

1. a) $\forall x > 0$, $e'_k(x) = kx \left(-\frac{k+1}{x}\right) e^{-(k+1)\ln(x)} < 0$ (car $k > 0$) | nb: $e'_k(x) = -\frac{k(k+1)}{x^{k+2}}$
Donc e_k $\searrow$ sur $\mathbb{R}_*^+$

b) Donc $e_k: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow e_k(\mathbb{R}_*^+)$ bij. De plus, comme e_k est continue

sur $\mathbb{R}_*^+$, on a $e_k(\mathbb{R}_*^+) =]\lim_{+\infty} e_k, \lim_{0^+} e_k[$

On calcule que, puisque $k > 0$, $\frac{k}{x^{k+1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $\frac{k}{x^{k+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi $e_k(\mathbb{R}_*^+) =]0, +\infty[$.

Finalement, $e_k: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est une bijection.

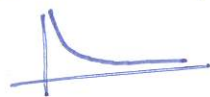
Pour $y \in \mathbb{R}_*^+$, on veut pour $x \in \mathbb{R}_*^+$: $e_k(x) = y \Leftrightarrow k e^{-(k+1)\ln(x)} = y$

$\Leftrightarrow -(k+1)\ln(x) = \ln\left(\frac{y}{k}\right) \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{k+1} \ln\left(\frac{y}{k}\right)$

$\Leftrightarrow x = \exp\left(-\frac{1}{k+1} \ln\left(\frac{y}{k}\right)\right)$. Ainsi $e_k^{-1}: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$
 $y \mapsto \exp\left(-\frac{1}{k+1} \ln\left(\frac{y}{k}\right)\right) = \left(\frac{k}{y}\right)^{\frac{1}{k+1}}$

c) On a vu que le tableau de variaⁿ de e_k était le suivant donc son graphe

	0	$+\infty$
e_k	$+\infty$	$\rightarrow 0$



Bref, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} e_k(x) = +\infty$, e_k a une asymptote verticale d'équaⁿ $x=0$. Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e_k(x) = 0$, e_k a une asymptote horizontale d'équaⁿ $y=0$.

2) a) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2\varphi = 1+\sqrt{5} \Rightarrow 2\varphi-1 = \sqrt{5} \Rightarrow (2\varphi-1)^2 = 5$
 $\Rightarrow 4\varphi^2 - 4\varphi + 1 = 5 \Rightarrow 4(\varphi^2 - \varphi - 1) = 0$

Ainsi φ est solution de l'équaⁿ $x^2 - x - 1 = 0$

b) • La tangente en 1 a pour équation: $y = e_k(1) + e'_k(1)(x-1)$

Or $e_k(1) = k$ et $e'_k(1) = -k(k+1)$.

Ainsi l'équaⁿ voulue est $y = k - k(k+1)(x-1)$

• Son coeff directeur est $-k(k+1)$ il vaut -1 si et seulement si

$k(k+1) = 1 \Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 0$

On calcule que les racines de $X^2 + X - 1$ sont

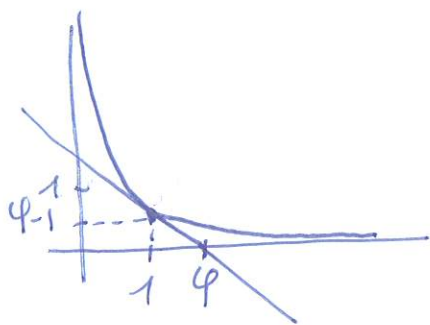
$$k_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Comme $k_2 < 0$ et $k_1 > 0$, on ne garde que k_1 et finalement la valeur de k demandée ici est $k = k_1 = \varphi - 1$

• Reste alors à vérifier que le point $(\varphi, 0)$ appartient à la droite pour cette valeur de k . Or pour $k = k_1 = \varphi - 1$ et $x = \varphi$:

$$k - k(k+1)(x-1) = (\varphi-1) - 1 \times (\varphi-1) = 0 \quad \text{qtd.}$$

c)



Pour $k = \varphi - 1$, la tangente en 1 passe par $(\varphi, 0)$ et a pour pente -1 .
De plus, $e_{\varphi-1}(1) = \varphi - 1$

3) Pour $x, y, x', y' > 0$ on a:

$$\frac{e_k(x)}{e_k(y)} = \frac{e_k(x')}{e_k(y')} \Leftrightarrow \frac{\frac{k}{x^{k+1}}}{\frac{k}{y^{k+1}}} = \frac{\frac{k}{x'^{k+1}}}{\frac{k}{y'^{k+1}}} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{-(k+1)} = \left(\frac{x'}{y'}\right)^{-(k+1)} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$

$$\text{(ou: } * \Leftrightarrow \frac{k e^{-(k+1)\ln(x)}}{k e^{-(k+1)\ln(y)}} = \frac{k e^{-(k+1)\ln(x')}}{k e^{-(k+1)\ln(y')}})$$

$$\Leftrightarrow e^{(k+1)[\ln(y) - \ln(x)]} = e^{(k+1)[\ln(y') - \ln(x')]}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{y'}{x'}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}$$