BCPST 1B **2024-2025**

Mathématiques - mercredi 28 mai 2025
Devoir n°8 Durée : 2 h 30 min

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Ce sujet comporte 5 pages dont une annexe.**
  Il est constitué de 3 exercices indépendants.

On rendra l'annexe même si elle n'est pas complétée.

Exercice 1.

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^4 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.

Dans cet exercice, on étudie les projecteurs de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire les endomorphismes $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $p \circ p = p$. La partie A présente un exemple, la partie B étudie la forme générale des matrices de ces endomorphismes, et la partie C présente une interprétation géométrique. Les trois parties sont indépendantes.

Partie A.

Dans cette partie, on considère $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ p(x,y,z) = (2x+2y-2z, x+y-z, 2x+2y-2z) = (x+y-z)\ (2,1,2)$$

1. (a) Montrer que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Vérifier que p est bien un projecteur, c'est-à-dire que $p \circ p = p$.
2. Soient $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (2,1,2)$.
   (a) Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(p)$.
   (b) Montrer que (u_3) une base de $\text{Im}(p)$.
   (c) Démontrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer la matrice de p dans la base (u_1, u_2, u_3).

Partie B.
Dans cette partie, on revient au cas général, et on considère $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $p \circ p = p$. On suppose de plus que $p \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $p \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

3. (a) Démontrer par l'absurde que p n'est pas un automorphisme.
   (b) En déduire que $\mathrm{rg}(p)$ vaut 1 ou 2. Préciser dans chaque cas la dimension de $\mathrm{Ker}(p)$.
   (c) Démontrer que pour $u \in \mathbb{R}^3$ on a : $u \in \mathrm{Im}(p) \iff p(u) = u$.
4. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{rg}(p) = 1$. En accord avec les questions précédentes, on note (u_1, u_2) une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et (u_3) une base de $\mathrm{Im}(p)$.
   (a) Démontrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Indication : on écrira $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ et on composera par p.
   (b) Déterminer la matrice de p dans la base (u_1, u_2, u_3).
5. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{rg}(p) = 2$.
   En suivant un raisonnement similaire à celui de la question précédente, démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie C.
On note $\langle \, . \mid . \, \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \forall v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \ \langle u | v \rangle = xx' + yy' + zz'$$

et on note $|| \, . \, ||$ la norme associée.

Dans cette partie on considère $d \in \mathbb{R}^3$ un vecteur tel que $||d|| = 1$ et on étudie l'application $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \ p(u) = \langle u | d \rangle \, d.$$

on note $\mathcal{D}$ la droite passant par l'origine et dirigée par $\mathcal{D}$ c'est-à-dire : $\mathcal{D} = \{t\, d \ , \ t \in \mathbb{R}\}$.

On va montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $p(u)$ est le projeté orthogonal de u sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que c'est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de u :

$$||u - p(u)|| = \min_{v \in \mathcal{D}} ||u - v|| = \min_{t \in \mathbb{R}} ||u - t\, d||.$$

6. Démontrer que p est un projecteur c'est-à-dire que :
   (a) $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, et
   (b) $p \circ p = p$.
7. Soit $u \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que $u - p(u)$ est orthogonal à d.
   (b) Énoncer et démontrer le résultat appelé "théorème de Pythagore" pour les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   (c) En déduire que $||u - p(u)|| = \min_{t \in \mathbb{R}} ||u - t\, d||$.
   Indication : on remarquera que $u - t\, d = (u - p(u)) + \lambda\, d$ avec $\lambda = \langle u | d \rangle - t$.

Exercice 3.

Un industriel de l'agroalimentaire réalise deux types de purées :

- la purée A ("carottes-pommes de terre") qui nécessite 750 grammes de carottes et 250 grammes de pommes de terre pour faire 1 kilogramme de purée,
- et la purée B ("pommes de terre-carottes") qui nécessite 250 grammes de carottes et 750 grammes de pommes de terre pour faire 1 kilogramme de purée.

Il dispose en tout de 150 kilogrammes de pommes de terre et de 100 kilogrammes de carottes. On note :

- x (respectivement y) la quantité de purée A (respectivement B) produite par l'industriel (en kg),
- c (respectivement p) la quantité totale de carottes (respectivement de pommes de terre) utilisée par l'industriel (en kg).

Dans tout l'exercice, on illustrera la situation par des dessins à rendre sur l'annexe. Ces dessins seront réalisés dans le plan (x, y) c'est-à-dire que l'abscisse correspond à la quantité de purée A produite, et l'ordonnée à la quantité de purée B.

1. (a) Exprimer c et p en fonction de x et de y.
   (b) Expliquer pourquoi x et y doivent satisfaire les inéquations suivantes :
$$(*) \ : \ \begin{cases} 0 \leq x \leq 600 - 3y \\ 0 \leq y \leq 400 - 3x \end{cases}$$
2. (a) Sur l'annexe, tracer en bleu la droite Δ_1 d'équation $x = 600 - 3y$.
   (b) Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ_2 d'équation $y = 400 - 3x$.
   (c) Déterminer $t \in \mathbb{R}$ tel que le point $A(t, t)$ appartienne à Δ_2.
   (d) Tracer alors en bleu la droite Δ_2 sur l'annexe en utilisant le point A.
3. En annexe, hachurer en bleu la zone $(\mathcal{Z})$ du plan correspondant aux quantités de purées A et B réalisables par l'industriel, c'est-à-dire aux couples (x, y) satisfaisant les inéquations $(*)$.
4. Pour quelles valeurs de x et de y l'industriel utilise-t-il toute sa marchandise ? Placer le point $M(x, y)$ correspondant sur le dessin.

Une grande surface propose à l'industriel de lui acheter sa purée A à 3 euros le kg, et sa purée B à 2 euros le kg. En produisant x kg de purée A et y kg de purée B, l'industriel réalise donc un gain g donné en euros par $g = 3x + 2y$.

Pour $k \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_k passant par le point $B(k, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (3, 2)$.

5. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in D_k$ si et seulement si le gain réalisé par l'industriel est égal à $g = 3k$.
6. Tracer en annexe le vecteur $50\,\vec{n} = (150, 100)$ en noir. Tracer ensuite en vert les droites D_k pour $k \in \{100, 150, 200\}$ en utilisant les points $B(k, 0)$.
7. L'industriel peut-il réaliser un gain de 600 euros ? *Une justification graphique sera suffisante.*
8. Quelles quantités x et y de purées doit-il produire pour maximiser son gain ? Quel est alors son gain maximal ? *Une justification graphique, à indiquer en rouge sur l'annexe, sera suffisante.*

Cette page est volontairement laissée blanche afin de pouvoir détacher l'annexe.

ANNEXE **(à rendre, même si vous ne l'avez pas complétée)**

NOM :

PRENOM :

On rappelle que sur ce schéma, l'abscisse x correspond à la quantité de purée A produite par l'industriel, et l'ordonnée y à celle de purée B. On rappelle les objets à tracer et leurs couleurs :

- en bleu : Δ_1, Δ_2, $(\mathcal{Z})$,
- en noir : M, $50\vec{n}$,
- en vert : $D_{100}, D_{150}, D_{200}$,
- en rouge : ce qui est utile pour la question 8.