# DS 8 - Corrigé



## Exercice 1

⊛ Tout d'abord, • $x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ en tant que composée des fonctions $x \mapsto 1+x$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et à valeurs dans $]1,+\infty[$ et $x \mapsto \ln(x)$ $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$

• Et $x \mapsto 2x^4+x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^-$ en tant que fonction polynomiale.

Ainsi $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$. Etudions sa régularité en 0.

⊛ continuité :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour } x>0,\ g(x) = \ln(1+x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ \text{Pour } x<0,\ g(x) = 2x^4+x \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \\ \text{Et } g(0) = \ln(1+0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ainsi } g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) \\ \text{donc } \boxed{g \text{ est continue en } 0.} \end{array}$$

⊛ dérivabilité :

Pour $x>0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$.

Pour $x<0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{x^4+x}{x} = x^3+1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Donc $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0)=1}$

[n.b. : faire la preuve de la dérivabilité suffisait pour traiter aussi la continuité puisque $g$ dérivable en 0 $\Rightarrow$ $g$ continue en 0.]

⊛ continuité de $g'$ :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour } x>0,\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\ \text{Pour } x<0,\ g'(x) = 8x^3+1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \\ \text{Et } g'(0) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ainsi } g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g'(0) \\ \text{donc } \boxed{g' \text{ est continue en } 0} \end{array}$$

Finalement $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})}$.

⊛ étude du caractère $\mathcal{C}^2$

Pour $x>0$, $\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x} = \dfrac{1-(1+x)}{x(1+x)} = -\dfrac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$

Pour $x<0$, $\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x-0} = \dfrac{8x^3+1-1}{x} = 8x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Comme $0 \neq 1$, la quantité $\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x-0}$ n'admet pas de limite en 0, donc $g'$ n'est pas dérivable en 0 donc $g$ n'est pas deux fois dérivable en 0.

Ainsi $\boxed{g \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R})}$

Exercice 2

Partie A :

1) a) Pour tous $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
p(\lambda u+v) &= p(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z') \\
&= (\lambda x+x'+\lambda y+y'-(\lambda z+z'))(2,1,2) \\
&= \lambda(x+y-z)(2,1,2) + (x'+y'-z')(2,1,2) \\
&= \lambda p(u)+p(v).
\end{aligned}$$

donc $\boxed{p\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

b) On a $p(1,0,0)=(2,1,2)$, $p(0,1,0)=(2,1,2)$ et $p(0,0,1)=(-2,-1,-2)$
donc la matrice de $p$ dans la base canonique est $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}=A$

c) Réponse 1 : Pour $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on calcule

$$\begin{aligned}
(p\circ p)(u) &= p(p(u)) \\
&= p(2x+2y-2z, x+y-z, 2x+2y-2z) \\
&= (a,b,c)
\end{aligned}$$

avec $a = 2(2x+2y-2z)+2(x+y-z)-2(2x+2y-2z)$
$= 2x+2y-2z$

$b = 2x+2y-2z + x+y-z - (2x+2y-2z)$
$= x+y-z$

et $c=a$

Donc $(p\circ p)(u) = (2x+2y-2z, x+y-z, 2x+2y-2z) = p(u)$

et donc $\boxed{p\circ p=p}$

ou Réponse 2 : On calcule que $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=A$. Comme $A^2$ est la matrice de $p\circ p$ dans la base canonique, on a donc $\boxed{p\circ p=p}$.

2) a) Pour $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$u\in Ker(p) \iff p(u)=0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \iff x+y-z=0$$

$$\iff z=x+y$$

Ainsi $Ker(p)=\{(x,y,x+y),\ x,y\in\mathbb{R}\}$
$=\{x(1,0,1)+y(0,1,1),\ x,y\in\mathbb{R}\}$
$=Vect(u_1,u_2)$

donc $(u_1,u_2)$ est une famille génératrice de $Ker(p)$.

De plus, $u_1$ et $u_2$ ne sont pas colinéaires (car, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda u_1=(\lambda,0,\lambda)\neq(0,1,1)=u_2$ et $\lambda u_2=(0,\lambda,\lambda)\neq(1,0,1)=u_1$) donc $(u_1,u_2)$ est une famille libre.

Finalement, $\boxed{(u_1,u_2) \text{ est une base de } Ker(p).}$

b) On a : $Im(p)=\{p(x,y,z),\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$
$=\{(x+y-z)(2,1,2),\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$
$=\{x(2,1,2)+y(2,1,2)-z(2,1,2),\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$
$=Vect((2,1,2),(2,1,2),-(2,1,2))$
$=Vect((2,1,2))$
$=Vect(u_3)$

donc $(u_3)$ est une famille génératrice de $Im(p)$ et comme $u_3\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ elle est libre, c'est donc une base de $Im(p)$.

c) On calcule que

$$rg(u_1,u_2,u_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$$

Or cette famille compte 3 vecteurs donc elle est libre. De plus $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc une famille libre de 3 vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

d) Par construction, $p(u_1) = p(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et on calcule que

$p(u_3) = p(2,1,2) = (2,1,2) = u_3$.

Ainsi la matrice de $p$ dans la base $(u_1,u_2,u_3)$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Partie B :

3) a) Si $p$ était bijectif, alors on pourrait écrire que :

$p \circ p = p$ donc $p \circ p \circ p^{-1} = p \circ p^{-1}$ donc $p = id_{\mathbb{R}^3}$.

Or par hypothèse $p \neq id_{\mathbb{R}^3}$. C'est donc que <u>$p$ n'est pas un automorphisme</u>.

b) Comme $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ on a $rg(p) \in [\![0,3]\!]$.

Or $p \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc $rg(p) \neq 0$, et $p \notin GL(\mathbb{R}^3)$ donc $rg(p) \neq 3$.

C'est donc que $\boxed{rg(p) \in \{1,2\}}$.

D'après le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^3) = rg(p) + \dim(\mathrm{Ker}(p))$

donc $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = 3 - rg(p)$.

Ainsi : $\boxed{\begin{array}{l} \text{si } rg(p) = 1 \text{ alors } \dim(\mathrm{Ker}(p)) = 2 \\ \text{et si } rg(p) = 2 \text{ alors } \dim(\mathrm{Ker}(p)) = 1 \end{array}}$

c) Soit $u \in \mathbb{R}^3$, raisonnons par double implication :

$(\Rightarrow)$ : Si $u \in Im(p)$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = p(v)$.

Donc $p(u) = p(p(v)) = (p \circ p)(v)$. Or $p \circ p = p$ donc $p(u) = p(v) = u$. Ainsi $p(u) = u$.

$(\Leftarrow)$ : Si $p(u) = u$ alors $u \in Im(p)$ puisque $p(u) \in Im(p)$.

Ainsi on a bien démontré que $\boxed{u \in Im(p) \Leftrightarrow p(u) = u}$

4) a) Comme $(u_1, u_2, u_3)$ compte $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, pour montrer que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$(*)$ $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors :

$p(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3) = p(0_{\mathbb{R}^3})$

donc $\lambda_1 p(u_1) + \lambda_2 p(u_2) + \lambda_3 p(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puisque $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

Or $u_1, u_2 \in Ker(p)$ donc $p(u_1) = p(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$,

et $u_3 \in Im(p)$ donc (par la question 3)c)) $p(u_3) = u_3$.

Ainsi on obtient $\lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Comme $(u_3)$ est une base de $Im(p)$ on a $u_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $\lambda_3 = 0$.

Revenons alors à $(*)$, on a : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Or $(u_1, u_2)$ est une base de $Ker(p)$ c'est donc une famille libre. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Finalement on a montré que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc $(u_1, u_2, u_3)$ est libre et, comme expliqué précédemment, est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Comme $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(p)$ on a $p(u_1) = p(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Et comme $u_3 \in \mathrm{Im}(p)$ on a (d'après la question 3)c)) $p(u_3) = u_3$.

Donc la matrice de $p$ dans la base $(u_1, u_2, u_3)$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

5) Si $rg(p) = 2$ alors $\mathrm{Im}(p)$ est de dimension 2 : notons $(u_2, u_3)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ ; et $\mathrm{Ker}(p)$ est de dimension 1 : notons $(u_1)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

Montrons que $(u_1, u_2, u_3)$ est libre (cela suffira à montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$) : si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (*) avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ alors par linéarité de $p$ :

$$p(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3) = \lambda_1 p(u_1) + \lambda_2 p(u_2) + \lambda_3 p(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

donc $\lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ car $p(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $p(u_2) = u_2$, $p(u_3) = u_3$

Le caractère libre de $(u_2, u_3)$ donne alors $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ d'où, d'après (*), $\lambda_1 u_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Enfin comme $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ on a donc aussi $\lambda_1 = 0$.

Finalement $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $p(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $p(u_2) = u_2$ et $p(u_3) = u_3$ donc la matrice de $p$ dans cette base est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

# Partie C

6) a) Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} p(\lambda u + v) &= \langle \lambda u + v \mid d \rangle d \\ &= \left(\lambda \langle u \mid d\rangle + \langle v \mid d \rangle\right) d \\ &= \lambda\left(\langle u \mid d \rangle d\right) + \langle v \mid d \rangle d \\ &= \lambda p(u) + p(v). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

b) Pour $u \in \mathbb{R}^3$ on a, en utilisant la linéarité de $p$ :

$$(p \circ p)(u) = p(p(u)) = p(\langle u \mid d \rangle d) = \langle u \mid d \rangle p(d)$$

Or comme $\|d\| = 1$ on a $p(d) = \langle d \mid d \rangle d = \|d\|^2 d = d$

Donc $(p \circ p)(u) = \langle u \mid d \rangle d = p(u)$. Ainsi $\boxed{p \circ p = p.}$

7) a) On calcule, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle u - p(u) \mid d \rangle &= \langle u \mid d \rangle - \langle p(u) \mid d \rangle \\ &= \langle u \mid d \rangle - \langle \langle u \mid d \rangle d \mid d \rangle \\ &= \langle u \mid d \rangle - \langle u \mid d \rangle \langle d \mid d \rangle \\ &= \langle u \mid d \rangle - \langle u \mid d \rangle \|d\|^2 \\ &= \langle u \mid d \rangle - \langle u \mid d \rangle \quad \text{car } \|d\| = 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{u - p(u) \text{ est orthogonal à } d}$.

b) On a le théorème suivant :

« Pour tous $v, w \in \mathbb{R}^3$, $\langle v|w\rangle = 0 \iff \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ »

Démontrons-le :

Soient $v, w \in \mathbb{R}^3$ on calcule que

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w \,/\, v+w\rangle$$
$$= \langle v|v\rangle + \langle w|v\rangle + \langle v|w\rangle + \langle w/w\rangle$$
$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle w/v\rangle$$

Dès lors $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff 2\langle w|v\rangle = 0$
$\iff \langle v|w\rangle = 0.$

c) Suivons l'indication en écrivant pour $t \in \mathbb{R}$ que :

$$u - td = u - \langle u|d\rangle d + \langle u|d\rangle d - td$$
$$= (u - p(u)) + \lambda d \quad \text{avec } \lambda = \langle u|d\rangle - t$$

Comme $u - p(u)$ est orthogonal à $d$ il est aussi orthogonal à $\lambda d$ et donc, d'après le théorème de Pythagore :

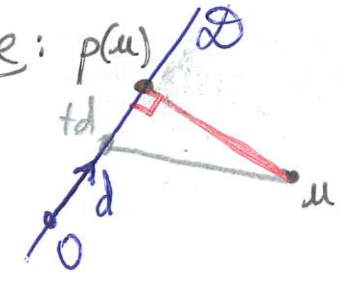
$$\|u - td\|^2 = \|u - p(u)\|^2 + \|\lambda d\|^2 \geqslant \|u - p(u)\|^2 \quad \text{car } \|\lambda d\|^2 \geqslant 0$$

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|u - td\| \geqslant \|u - p(u)\|$

De plus $u - p(u) = u - td$ avec $t = \langle u|d\rangle$.

C'est donc que $\|u - p(u)\|$ est la valeur minimale de $\|u - td\|$ pour $t \in \mathbb{R}$ soit le résultat annoncé

Rqe :




Comme $p(u)$ est le point de $\mathcal{D}$ tel que $u - p(u) \perp d$, on voit sur un schéma que la distance de $u$ à $\mathcal{D}$ vaut $\|u - p(u)\|$.

Exercice 3

1) a) Pour produire $x$ kg de purée A l'industriel utilise :

- $x \times 0{,}750 = \frac{3}{4}x$ kg de carottes et
- $x \times 0{,}250 = \frac{1}{4}x$ kg de pommes de terre.

Pour produire $y$ kg de purée B l'industriel utilise :

- $y \times 0{,}250 = \frac{1}{4}y$ kg de carottes et
- $y \times 0{,}750 = \frac{3}{4}y$ kg de pommes de terre.

Ainsi la quantité totale de carottes utilisée est :

$$\boxed{c = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y},$$

et celle de pommes de terre est :

$$\boxed{p = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y}.$$

b) Tout d'abord les quantités $x$ et $y$, correspondant à des masses, doivent être positives : $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Ensuite, l'énoncé indique que l'industriel ne dispose que de 100 kg de carottes donc $c \leq 100$ c'est-à-dire $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y \leq 100$ ou encore $3x + y \leq 400$ ou encore $y \leq 400 - 3x$.

De même l'énoncé donne $p \leq 150$ donc $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y \leq 150$ donc $x + 3y \leq 600$ donc $x \leq 600 - 3y$.

Finalement on a bien $\boxed{\begin{cases} 0 \leq x \leq 600 - 3y \\ 0 \leq y \leq 400 - 3x \end{cases}}$.

2) a) voir annexe (n.b : $x = 600 - 3y \iff y = 200 - \frac{x}{3}$)

b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $y = 400 - 3x \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 400 - 3t \end{cases}$.

Donc un vecteur directeur de $\Delta_2$ est $\boxed{\vec{u} = (1, -3)}$.

c) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$A(t,t) \in \Delta_2 \iff t = 400 - 3t \iff 4t = 400 \iff t = 100$.

Ainsi le point $\boxed{A(100, 100) \text{ appartient à } \Delta_2}$.

d) voir annexe.

3) voir annexe.

4) L'industriel utilise toute sa marchandise lorsque $c = 100$ et $p = 150$. On résout donc

$$\begin{cases} c = 100 \\ p = 150 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y = 100 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = 150 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y = 400 \\ x + 3y = 600 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y = 400 \\ -8x = 600 - 1200 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 400 - 3x \\ x = \frac{-600}{-8} = 75 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 75 \\ y = 400 - 3 \times 75 = 175 \end{cases}$$

Donc l'industriel utilise toute sa marchandise si et seulement si il produit 75 kg de purée A et 175 kg de purée B.

On place $M(75, 175)$ sur le dessin en annexe : il s'agit du point d'intersection des droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$.

5) Comme $D_k$ est la droite passant par $B(k,0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (3, 2)$, un point $P(x,y)$ appartient à $D_k$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-k, y-0) \cdot (3,2) = 0$$

$$\iff 3(x-k) + 2y = 0$$

$$\iff 3x + 2y = 3k$$

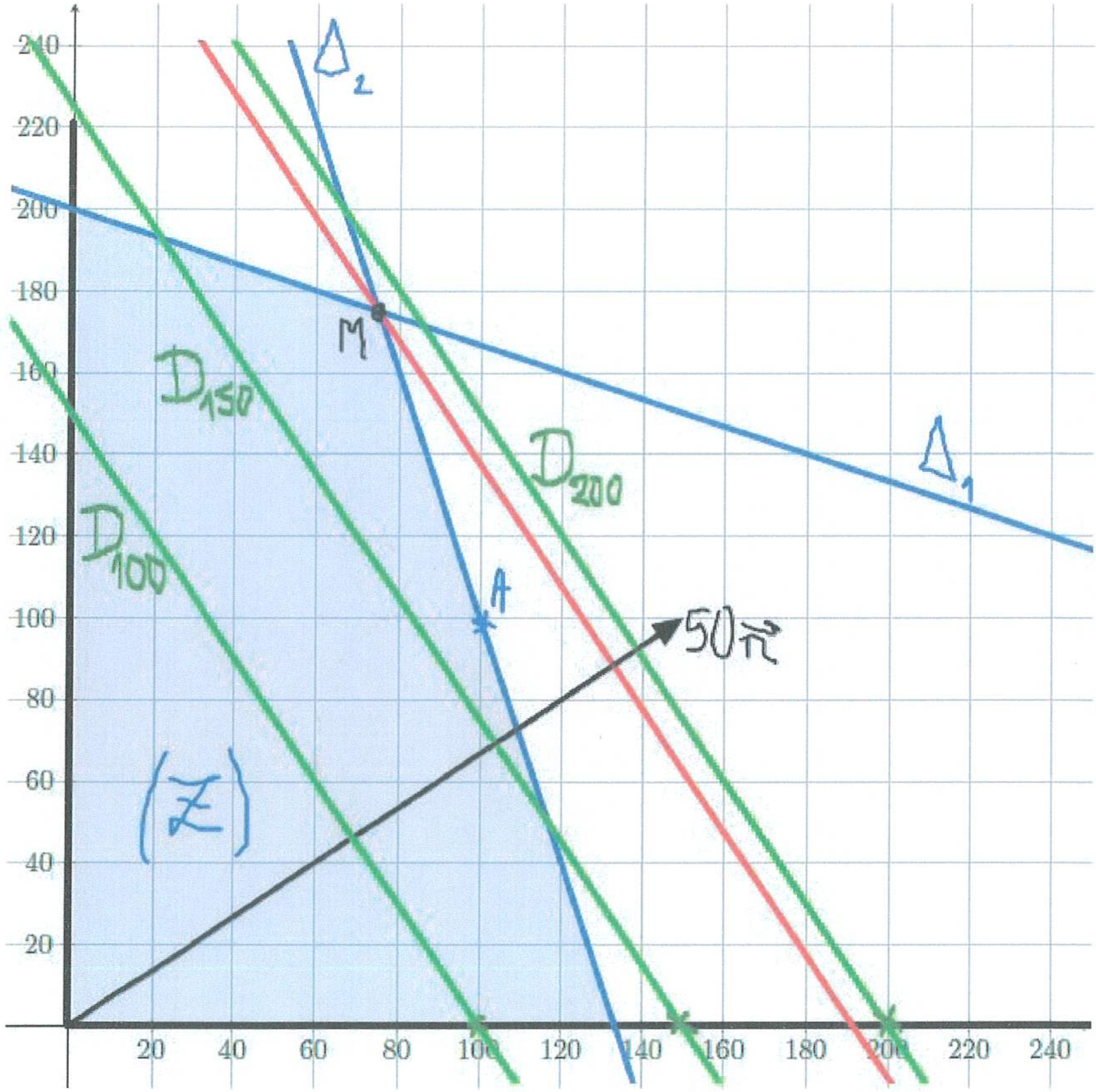
$$\iff g = 3k \quad \text{ce qu'il fallait démontrer.}$$

6) voir annexe

7) Non, l'industriel ne peut pas gagner 600 euros.
En effet, pour gagner $g = 600$ euros, il faut qu'il produise $x$ kg de purée A et $y$ kg de purée B avec $(x, y) \in D_{200}$ d'après la question 5.
Or, on constate graphiquement que la droite $D_{200}$ n'intersecte pas la zone $(Z)$ des couples $(x, y)$ réalisables par l'industriel.

8) On constate graphiquement que les droites $D_k$ sont parallèles. Plus $k$ augmente plus la droite $D_k$ se décale vers la droite et plus le bénéfice est grand. Pour maximiser le bénéfice il faut donc choisir la droite $D_k$ la plus à droite du dessin parmi celles intersectant la zone $(Z)$. Graphiquement on constate qu'il faut donc choisir la droite $D_k$ passant par le point M, tracée en rouge en annexe.
Pour optimiser son bénéfice, l'industriel doit donc choisir $\boxed{x = 75 \text{ et } y = 175}$. Son gain est alors donné par $g = 3x + 2y = 575$. L'industriel gagne au maximum 575 €.

Remarque : Ce type de problème d'optimisation, très courant dans de nombreux domaines concrets, s'appelle problème linéaire car les contraintes définissant la zone $(Z)$ et la fonction $g$ à maximiser sont linéaires. On sait aujourd'hui assez bien résoudre numériquement les problèmes linéaires, même si ce domaine fait encore l'objet de recherches en mathématiques appliquées. On pourra consulter la page Wikipédia "Optimisation linéaire



240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
$\Delta_2$
$\Delta_1$
M
A
$D_{150}$
$D_{200}$
$D_{100}$
$50\vec{n}$
(Z)